ZUR INTEGRATION DER LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN ÖFFENTLICH ZU VERTEIDIGEN

AM 10. AUGUST 1886 VORMITTAGS 9 UHR

VON

LOTHAR HEFFTER

AUS CÖSLIN.

OPPONENTEN:

Herr P. Stäckel, Dr. phil.
Herr C. Färber, cand. math.
Herr A. Velde, cand. math.

BERLIN

DRUCK VON GEBR. UNGER (TH. GRIMM)

1886.

Unter den linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung spielt die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe eine besonders hervorragende Rolle, weil es möglich war, die Integration derselben und das Studium ihrer Integrale so weit zu führen, dass kaum noch etwas zu wünschen bleibt. Ebendeshalb hat man sich auch mit Verallgemeinerungen dieser Differentialgleichung oder der durch sie definierten hypergeometrischen Reihe vielfach beschäftigt. Es gehören hierher die Abhandlungen der Herren *Thomae* (Mathematische Annalen Bd. 2), — *Hossenfelder* (Mathematische Annalen Bd. 4), — *Pochhammer* (Crelles Journal Bd. 71 und 73), — *Heymann* (Zeitschrift. für Math. und Phys. Jahrgang 29, 1884), — *Appell* (Liouville, Journ. d. Math. Ser. III. t. 8 u. 10), — *Schafheitlin* (Inaugural-Dissertation, Halle 1885) und andere mehr.

Die Anregung zu den folgenden Untersuchungen gab jedoch vorzugsweise die Dissertation des Herrn *Seifert* (Göttingen, 1875), betitelt „Über die Integration der Differentialgleichung

$$(t-a)(t-b)(t-c)\frac{d^2y}{dt^2}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}t+\mathfrak{c}t^2)\frac{dy}{dt}+(\mathfrak{d}+\mathfrak{e}t)\cdot y=0“.$$

Von dieser Differentialgleichung wird für jeden singulären Punkt ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt, der Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Fundamentalsystemen ermittelt, die Eigenschaften der durch die Differentialgleichung definierten Funktionen und endlich eine Reihe spezieller Fälle dieser Funktion untersucht. Das Charakteristische der von Herrn *Seifert* angewandten Methode besteht darin, dass für einen Punkt, in dessen Umgebuug die Integrale studiert werden sollen, die Rekursionsformel der die Differentialgleichung befriedigenden Reihe aufgestellt und die Wurzeln der quadratischen Funktionen des Index, mit denen die in der

Formel vorkommenden Reihenkoeffizienten multipliziert sind, als Parameter in die Koeffizienten der Differentialgleichung eingeführt werden. Der Haupterfolg aber dieser Methode ist der, dass alsdann die Integrale in mannigfacher Beziehung ein analoges Verhalten zeigen, wie die der Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe, besonders, dass aus einem Integral wie dort ein zweites, linear unabhängiges durch eine einfache Veränderung jener Parameter, die den *Gauss*schen α, β, γ entsprechen, hervorgeht.

Es zeigt sich nun, dass dieses von Herrn *Seifert* auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit 3 singulären Punkten angewandte Verfahren auf eine ganz beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integrale sich „regulär“ verhalten (vergl. die Abhandlung des Herrn *Fuchs*, *Crelles* Journal, Bd. 66. 4. Gleichung [12.]), ausgedehnt werden kann und zu analogen Resultaten führt: dies wird im wesentlichen den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bilden.

Mit der vorgelegten allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung wird zunächst eine Transformation vorgenommen, welche sich stets und nur bei der zweiten Ordnung ausführen lässt (Nr. I).

Nachdem sodann (in II, III, IV) für einen nicht singulären, für jeden singulären und für den unendlich fernen Punkt ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt ist, wird (Nr. V) der Zusammenhang zwischen den einzelnen Fundamentalsystemen angegeben, d. h. es werden die Koeffizienten berechnet, vermittelst deren die Elemente des zu einem singulären Punkt gehörigen Fundamentalsystems durch die eines anderen linear und homogen ausgedrückt sind.

Nr. VI beschäftigt sich noch mit den in der Untersuchung auftretenden Reihen, ihren Eigenschaften und Spezialfällen. Insbesondere führt die Betrachtung der contiguen Funktionen dieser Reihen zu dem Resultat, dass die vorliegende Differentialgleichung zweiter Ordnung mit ϱ singulären Punkten als Spezialfall einer solchen der ϱten Ordnung mit denselben singulären Punkten und von demselben Charakter erscheint.

Es soll an dieser Stelle noch erwähnt werden, wovon in Nr. VI ausführlicher gehandelt wird, dass neuerdings Herr *Schaftheitlin* in seiner bereits zitierten Dissertation eine im Grundprinzip mit der des Herrn *Seifert* übereinstimmende Methode auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung n

angewandt hat, bei denen sämtliche Koeffizienten ganze Funktionen der unabhängigen Variablen sind von solcher Beschaffenheit, dass der Koeffizient der $(n-p)$ten Ableitung einen um mindestens p Einheiten geringeren Grad besitzt als der Koeffizient der höchsten, $n$ten Ableitung. Da jedoch die weiteren Ausführungen dieser Abhandlung, — die dem Verfasser der vorliegenden Untersuchungen leider erst beim Abschluss derselben bekannt wurde, — sich im übrigen auf andere Punkte erstrecken, dürften wohl die hier erzielten Resultate trotzdem nicht überflüssig erscheinen, wenn auch die Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der in Nr. I vorgenommenen Transformation nur ein Spezialfall jener von Herrn *Schafheitlin* behandelten Klasse von Differentialgleichungen ist.

Die Bezeichnungsweise in den folgenden Blättern lehnt sich allenthalben an diejenige an, welche mein verehrter Lehrer, Herr *Fuchs*, in seinen Abhandlungen im 66. und 68. Band des *Crelle*schen Journals eingeführt hat.

I.

Die allgemeinste Form einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit ϱ von einander verschiedenen singulären Punkten

$$a_1, a_2, \ldots a_\varrho,$$

deren Integrale sich in der Umgebung aller endlichen singulären und des unendlich fernen Punktes regulär verhalten, ist, wie Herr *Fuchs* (a. a. O.) gezeigt hat,

$$1. \quad \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{A(z)}{\psi(z)} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{B(z)}{\psi(z)^2} \cdot y = 0,$$

wo

$$\psi(z) = (z - a_1)(z - a_2) \ldots . (z - a_\varrho),$$

$A(z)$ und $B(z)$ ganze Funktionen von z sind, resp. höchstens vom Grad $\varrho - 1$ und $2\varrho - 2$.

Man kann bekanntlich — Herr *Fuchs* hat diese Transformation in seinen Vorlesungen über „lineare Differentialgleichungen" angeführt — jede solche Differentialgleichung und nur die von der zweiten Ordnung in eine

andere mit der abhängigen Variablen u transformieren, bei welcher der Koeffizient von $\frac{d^2u}{dz^2}$ die Funktion $\psi(z)$, die Koeffizienten von $\frac{du}{dz}$ und u ganze Funktionen von z, resp. des Grades $\varrho - 1$ und $\varrho - 2$ sind.

Ist nämlich s_i eine von Null verschiedene Wurzel der zu $z = a_i$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung:

$$2.\quad s(s-1) + s \cdot \frac{A(a_i)}{\psi'(a_i)} + \frac{B(a_i)}{\psi'(a_i)^2} = 0,$$

so geht durch die Substitution

$$y = \underset{(i=1,2,\ldots\varrho)}{\Pi}(z-a_i)^{s_i} \cdot u$$

die Differentialgleichung (1.) über in

$$3.\quad \Pi \cdot \psi^2 \frac{d^2u}{dz^2} + \left[2 \cdot \Pi \cdot \psi^2 \cdot \sum_{k=1}^{k=\varrho} \frac{s_k}{z-a_k} + \Pi \cdot \psi \cdot A(z)\right] \cdot \frac{du}{dz}$$

$$+ \left\{ \Pi \cdot \psi^2 \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=\varrho} \frac{s_k(s_k-1)}{(z-a_k)^2} + \sum_{\substack{i,k=1,2,\ldots\varrho \\ (i<k)}} \frac{2\, s_i\, s_k}{(z-a_i)(z-a_k)}\right] + \right.$$

$$\left. + \Pi \cdot \psi \cdot A(z) \sum_{k=1}^{k=\varrho} \frac{s_k}{z-a_k} + \Pi \cdot B(z) \right\} \cdot u = 0$$

Dividiert man diese durch $\Pi(z-a_i) \cdot \psi$, so haben die Koeffizienten von $\frac{d^2u}{dz^2}$ und $\frac{du}{dz}$ schon die gewünschte Form. Dass das Gleiche von dem Koeffizient von u gilt, erkennt man leicht unter Berücksichtigung der Gleichung (2.). — Das Letztere lässt sich auch in folgender Weise erschliessen: Dividiert man (3.) zuerst nur durch $\Pi(z-a_i)$, so ist der Koeffizient von u eine ganze Funktion von z des Grades $2\varrho - 2$, die mit $\overline{B}(z)$ bezeichnet werden möge. Infolge der angewandten Substitution ist nun die eine der beiden Wurzeln der zu einem singulären Punkt gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung von (3.) immer $= 0$; also ist:

$$\frac{\overline{B}(a_i)}{\psi'(a_i)^2} = 0\ (i = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Folglich ist $\overline{B}(z)$ durch $\psi(z)$ teilbar und $\frac{\overline{B}(z)}{\psi(z)}$ eine ganze Funktion vom Grad $\varrho - 2$.

Diese Transformation ist nur dann nicht ausführbar, wenn sämtliche $s_i = 0$ sind. Dann hat aber die Differentialgleichung (1.) bereits die gewünschte Form.

Dass nun bei Differentialgleichungen höherer Ordnung eine solche Transformation, nach der die Koeffizienten ganze Funktionen mit successive um eine Einheit abnehmendem Grad sind, im allgemeinen nicht möglich ist, ergiebt sich schon daraus, dass, wenn die determinierende Fundamentalgleichung mehr als zwei Wurzeln hat, durch Subtraktion der einen von den übrigen die neuen Wurzeln im allgemeinen natürlich nicht die Werte annehmen

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, n-2,\ s,$$

wie es in jenem Fall sein müsste.

Wir dürfen uns also im folgenden auf die einfachere Form beschränken:

$$4.\quad \psi(z) \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + A(z) \cdot \frac{dy}{dz} + B(z) \cdot y = 0,$$

wo

$$\psi(z) = \Pi_{i=1,2,\ldots,\varrho} (z - a_i),$$

$A(z)$ und $B(z)$ ganze Funktionen, resp. des Grades $\varrho - 1$ und $\varrho - 2$.

II.

Die Integration der vorgelegten Differentialgleichung (4.) Nr. I erfordert die Aufstellung eines Fundamentalsystems von Integralen für jeden singulären Punkt und die Angabe der konstanten Koeffizienten, vermittelst deren die Elemente eines Fundamentalsystems als homogene lineare Funktionen der Elemente eines anderen erscheinen.

Wir werden aber mit der Entwicklung von Formeln beginnen, welche die Herstellung eines Fundamentalsystems für einen beliebigen nicht singulären Punkt $z = z_0$ gestatten.

Aus der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen weiss man, dass eine in der Umgebung des Punktes z_0 konvergente Reihe von $z - z_0$ der Differentialgleichung genügt, und dass in ihr noch zwei willkürliche Konstanten vorkommen. Ist diese Reihe

$$1.\quad y = \sum_{k=0}^{k=\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

so ergiebt sich für die Koeffizienten b die Rekursionsformel

$$2.\quad b_{k+2}\cdot q_0\,(k+2)\,(k+1)+b_{k+1}\Big[q_1\,(k+1)\,k+A(z_0)(k+1)\Big]+$$
$$+\,b_k\Big[\,q_2\,k\,(k-1)+A'(z_0)\cdot k+B(z_0)\,\Big]+\cdots$$
$$\cdots+b_{k-\lambda+1}\cdot\Big[\,q_{\lambda+1}\,(k-\lambda+1)\,(k-\lambda)+\frac{A^{(\lambda)}_{(z_0)}}{\lambda!}\,(k-\lambda+1)+\frac{B^{(\lambda-1)}_{(z_0)}}{(\lambda-1)!}\Big]+\cdot$$
$$+\,b_{k-\varrho+2}\Big[(k-\varrho+2)\,(k-\varrho+1)+\frac{A^{(\varrho-1)}_{(z_0)}}{(\varrho-1)!}\,(k-\varrho+2)+\frac{B^{(\varrho-2)}_{(z_0)}}{(\varrho-2)!}\Big]=0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$3.\quad \frac{\psi^{(\lambda)}_{(z_0)}}{\lambda!}=q_\lambda,\ (\lambda=0,1,\ldots,\varrho).$$

Von diesen Grössen q ist q_ϱ stets $=1$, q_0 nie $=0$. Falls auch keines der übrigen q_λ verschwindet, kann man (2.) in die Form setzen

$$4.\quad b_{k+2}\cdot q_0\,(k+2)\,(k+1)+b_{k+1}\cdot q_1\,(k+1)\,(k+\gamma)$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varrho-1} b_{k-\lambda+1}\,q_{\lambda+1}\,(k+\alpha_\lambda)\,(k+\beta_\lambda)=0,$$

sodass die Grössen α_λ, β_λ ($\lambda=1,2,\ldots,\varrho-1$) und γ definiert sind durch die Gleichungen

$$5.\quad\left\{\begin{aligned}&\alpha_\lambda+\beta_\lambda=\frac{A^{(\lambda)}_{(z_0)}}{q_{\lambda+1}\cdot\lambda!}-2\lambda+1\\&\alpha_\lambda\cdot\beta_\lambda=\frac{1}{q_{\lambda+1}}\Big[\frac{B^{(\lambda-1)}_{(z_0)}}{(\lambda-1)!}-(\lambda-1)\,\frac{A^{(\lambda)}_{(z_0)}}{\lambda!}\Big]+\lambda\,(\lambda-1)\\&\qquad(\lambda=1,2,\ldots,\varrho-1)\\&\gamma=\frac{A(z_0)}{q_1}\end{aligned}\right.$$

Setzt man noch

$$\alpha_0+\beta_0-1=\gamma$$

und kommt überein, dass die eine der Grössen α_0, $\beta_0=1$, die andere also $=\gamma$ ist, so ist die Definition von γ schon in dem System der Gleichungen für die α, β enthalten, wenn man dort λ auch den Wert Null beilegt.

Umgekehrt ergeben diese Gleichungen

$$6.\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{A^{(\lambda)}_{(z_0)}}{\lambda!}=q_{\lambda+1}\,(\alpha_\lambda+\beta_\lambda+2\lambda-1)\\&\frac{B^{(\lambda-1)}_{(z_0)}}{(\lambda-1)!}=q_{\lambda+1}\,(\alpha_\lambda+\lambda-1)\,(\beta_\lambda+\lambda-1)\end{aligned}\right.$$
$$(\lambda=0,1,\ldots,\varrho-1),$$

sodass der Differentialgleichung (4.) Nr. I in der Umgebung von $z = z_0$ die Form gegeben werden kann:

$$7. \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho} q_\lambda (z-z_0)^\lambda \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} q_{\lambda+1} (\alpha_\lambda + \beta_\lambda + 2\lambda - 1)(z-z_0)^\lambda \cdot \frac{dy}{dz} + \\ + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varrho-1} q_{\lambda+1} (\alpha_\lambda + \lambda - 1)(\beta_\lambda + \lambda - 1)(z-z_0)^{\lambda-1} \cdot y = 0.$$

Um zu einer independenten Darstellung der Reihenkoeffizienten b zu gelangen, setzen wir zur Abkürzung

$$8. \quad \begin{cases} A_k^0 = q_0 (k+1)(k+2) \\ A_k^{\lambda+1} = q_{\lambda+1} (k+\alpha_\lambda)(k+\beta_\lambda) \\ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \varrho - 1). \end{cases}$$

Bildet man dann die Gleichung (4.) für

$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

so hat man für

$$b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}$$

n lineare Gleichung mit der Determinante

$$\triangle = n!\,(n+1)! \cdot q_0^n,$$

und es ist

$$9. \quad \triangle \cdot b_{n+1} = (-1)^n \begin{vmatrix} b_0 A_0^2 + b_1 A_0^1, & A_0^0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & , 0 \\ b_0 A_1^3 + b_1 A_1^2, & A_1^1, & A_1^0, & 0, & \ldots & \ldots & , 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 A_{\varrho-2}^{\varrho} + b_1 A_{\varrho-2}^{\varrho-1}, & A_{\varrho-2}^{\varrho-2}, & \ldots & , A_{\varrho-2}^0, & 0, & \ldots & , 0 \\ b_1 A_{\varrho-1}^{\varrho}, & A_{\varrho-1}^{\varrho-1}, & \ldots & , A_{\varrho-1}^1, & A_{\varrho-1}^0, & 0, & , 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, & 0, & A_{n-2}^{\varrho}, & A_{n-2}^{\varrho-1}, & \ldots & \ldots & , A_{n-2}^0 \\ 0, \ldots, & 0, & 0, & A_{n-1}^{\varrho}, & \ldots & \ldots & , A_{n-1}^1 \end{vmatrix}$$

Hierin sind b_0 und b_1 noch willkürlich; um zu einem Fundamentalsystem zu gelangen, kann man z. B. setzen in einem Integral:

$$b_0 = 0, \; b_1 = 1,$$

in einem zweiten:

$$b_0 = 1, \; b_1 = 0.$$

Bezeichnet man die beiden dadurch entstehenden Reihen mit

$$\Psi_0(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{\varrho-1}, \beta_{\varrho-1}, \gamma; z - z_0)$$

und

$$\Psi_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{\varrho-1}, \beta_{\varrho-1}, \gamma; z - z_0)$$

und die Determinante, welche aus der in (9.) mit b_1 multiplizierten Determinante durch Weglassung der k ersten Horizontal- und Vertikalreihen entsteht, mit

$$D_{k, n-1},$$

so konstituieren

$$\Psi_0, \Psi_1$$

das gesuchte Fundamentalsystem, und die Koeffizienten des ersteren sind:

$$b_0^0 = 0,\ b_1^0 = 1,\ b_{n+1}^0 = \frac{(-1)^n \cdot D_{0, n-1}}{\triangle} \quad (n \geqq 1)$$

die des letzteren:

$$b_0^1 = 1,\ b_1^1 = 0,\ b_{n+1}^1 = \frac{(-1)^n}{\triangle} \sum_{k=2}^{k=\varrho} (-1)^k A_{k-2}^k (k-2)!\,(k-1)!\, q_0^{k-2} \cdot D_{k-1, n-1}.$$

Der Wert von b_{n+1}^1 ergiebt sich aus (9.), wenn man die Derterminante nach der ersten Vertikalreihe entwickelt.

Hierbei wurde angenommen, dass keine der Grössen $q = 0$ sei. Ist nun $q_{\lambda+1} = 0$, so verlieren zwar die Definitionsgleichungen für α_λ, β_λ ihre Bedeutung; da aber die Grössen α_λ, β_λ in der Differentialgleichung und in der Reihe immer nur in den Verbindungen

$$q_{\lambda+1}(\alpha_\lambda + \beta_\lambda - 2\lambda - 1) = \frac{A_{(z_0)}^{(\lambda)}}{\lambda!}$$

$$q_{\lambda+1}(\alpha_\lambda + \lambda - 1)(\beta_\lambda + \lambda - 1) = \frac{B_{(z_0)}^{(\lambda-1)}}{(\lambda-1)!}$$

$$q_{\lambda+1}(\alpha_\lambda + k)(\beta_\lambda + k) = \frac{A_{(z_0)}^{(\lambda)}}{\lambda!}(k - \lambda + 1) + \frac{B_{(z_0)}^{(\lambda-1)}}{(\lambda-1)!}$$

vorkommen, die für $q_{\lambda+1} = 0$ die nebenstehenden wohlbestimmten Werte haben, so kann man auch in diesem Fall jene Zeichen beibehalten.

III.

Die in der voriger Nummer angewandte Bezeichnungsweise gewinnt jedoch ihre Bedeutung erst bei den singulären Punkten und lässt hier eine merkwürdige Analogie mit der Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe

erkennen. — Es soll jetzt für einen beliebigen derselben a_i ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt werden.

Da die eine der beiden Wurzeln der zu irgend einem singulären Punkt gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung immer $= 0$ ist, so genügt der Differentialgleichung in der Umgebung von $z = a_i$ eine nach positiven, ganzen Potenzen von $z - a_i$ fortschreitende Reihe

$$1. \quad y = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k (z - a_i)^k;$$

der Radius ihres Konvergenzkreises ist der kleinste der Werte

$$| a_i - a_k | ,$$

wenn k die Werte

$$1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, \varrho$$

durchläuft.

Ähnlich wie in Nr. II setzen wir

$$\frac{\psi^{(\lambda)}_{(a_i)}}{\lambda!} = p_{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

$p_{\varrho-1}$ ist stets $= 1$, p_0 nie $= 0$. Sollte eines der andern p verschwinden, so greift die am Schluss der vorigen Nummer gemachte Bemerkung auch hier Platz.

Dann lautet die Rekursionsformel der Reihe (1.)

$$2. \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (k + \alpha_\lambda)(k + b_\lambda) c_{k-\lambda+1} = 0,$$

wo

$$3. \quad \begin{cases} \alpha_\lambda + \beta_\lambda = \dfrac{A^{(\lambda)}_{(a_i)}}{p_\lambda \cdot \lambda!} - 2\lambda + 1 \\ \alpha_\lambda \cdot \beta_\lambda = \dfrac{1}{p_\lambda}\left[\dfrac{B^{(\lambda-1)}_{(a_i)}}{(\lambda-1)!} - (\lambda - 1 \dfrac{A^{(\lambda)}_{(a_i)}}{\lambda!}\right] + \lambda(\lambda - 1) \\ \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \varrho - 1) \end{cases}$$

und

$$\alpha_0 + \beta_0 - 1 = \gamma = \frac{A(a_i)}{p_0}.$$

Wieder sei eine der Grösse α_0, $\beta_0 = 1$, die andere $= \gamma$, was mit den Bestimmungsgleichungen (3.) im Einklang steht.

Die hier eingeführten Grössen α_λ, β_λ, γ müssten eigentlich noch

einen oberen Index i führen, der aber, wo eine Verwechslung ausgeschlossen, der Einfachheit wegen fortgelassen werden soll!

Aus den Gleichungen (3.) ergeben sich wieder umgekehrt die Grössen

$$\frac{A^{(\lambda)}_{(a_i)}}{\lambda!} \text{ und } \frac{B^{(\lambda-1)}_{(a_i)}}{(\lambda-1)!},$$

so dass die Differentialgleichung (4.) Nr. I die Form annimmt

$$4.\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (z-a_i)^{\lambda+1}\cdot\frac{d^2y}{dz^2} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda(\alpha_\lambda+\beta_\lambda+2\lambda-1)(z-a_i)^\lambda\cdot\frac{dy}{dz} +$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda(\alpha_\lambda+\lambda-1)(\beta_\lambda+\lambda-1)(z-a_i)^{\lambda-1}\cdot y = 0$$

Für $\varrho = 2$ und, wenn noch

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1$$

gesetzt wird, ist (4.) unmittelbar die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe.

Die Rekursionsformel (2.) lässt den ersten Koeffizienten willkürlich; setzt man

$$c_0 = 1$$

und nimmt zunächst an, dass

a) γ keine (positive oder negative) ganze Zahl oder Null sei,

so ergiebt sich aus (2.) wie in voriger Nummer ein beliebiger Koeffizient der Reihe (1.) in folgender Gestalt:

$$5.\quad c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\,.\,D_{0,n}}{p_0^{n+1}\cdot(n+1)!\ \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)},$$

$$\text{wo } D_{0,n} = \begin{vmatrix} A_0^1, & A_0^0, & 0, & \dots & \dots & \dots & \dots & , 0 \\ A_1^2, & A_1^1, & A_1^0, & 0, & \dots & \dots & \dots & , 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\varrho-2}^{\varrho-1}, & A_{\varrho-2}^{\varrho-2}, & A_{\varrho-2}^{\varrho-3}, & \dots & , A_{\varrho-2}^0, & 0, & \dots & , 0 \\ 0, & A_{\varrho-1}^{\varrho-1}, & A_{\varrho-1}^{\varrho-2}, & \dots & , A_{\varrho-1}^1, & A_{\varrho-1}^0, & 0, \dots & , 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \dots & 0, & A_{n-1}^{\varrho-1}, \dots, & \dots & \dots & \dots & , A_{n-1}^0 \\ 0, & \dots & 0, & 0, & A_n^{\varrho-1}, & \dots & \dots & , A_n^1 \end{vmatrix}$$

und zur Abkürzung gesetzt ist (ähnlich wie in Nr. II)

$$p_\lambda(k+\alpha_\lambda)(k+\beta_\lambda) = A_k^\lambda$$
$$\begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \dots, \varrho-1 \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

Die Nenner der einzelnen Reihenkoeffizienten sind also abgesehen von einer Potenz von p_0 dieselben wie bei der *Gauss*schen Reihe, die Zähler Determinanten, deren Diagonalglied, bis auf eine Potenz von p_1, mit den Zählern der Reihe

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma)$$

übereinstimmt.

Wir wollen die so bestimmte Reihe bezeichnen durch

$$6.\quad y_{i1} = \Phi(p_0, p_1, \ldots, p_{\varrho-1};\ \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{\varrho-1}, \beta_{\varrho-1}, \gamma;\ z - a_i)$$

Da nun die zu $z = a_i$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (4.)

$$s(s-1) + s \cdot \gamma = 0$$

die Wurzeln

$$0,\ 1 - \gamma$$

hat, so muss man, um das andere zu $1 - \gamma$ gehörige Element des Fundamentalsystems zu finden, in (4.) substituieren

$$7.\quad y = (z - a_i)^{1-\gamma} \cdot u.$$

Aus Nr. I folgt schon, dass die resultierende Differentialgleichung in u denselben Charakter hat wie (4.). Führt man aber die Transformation wirklich aus, so ergiebt sich die Differentialgleichung

$$8.\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (z - a_i)^{\lambda+1} \cdot \frac{d^2u}{dz^2} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (\alpha'_\lambda + \beta'_\lambda + 2\lambda - 1)(z - a_i)^\lambda \cdot \frac{du}{dz} +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (\alpha'_\lambda + \lambda - 1)(\beta'_\lambda + \lambda - 1)(z - a_i)^{\lambda-1} \cdot u = 0,$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_\lambda &= \alpha_\lambda + 1 - \gamma \\ \beta'_\lambda &= \beta_\lambda + 1 - \gamma \end{aligned}\right\} (\lambda = 0, 1, \ldots, \varrho - 1)$$

$$\gamma' = \alpha'_0 + \beta'_0 - 1 = 2 - \gamma.$$

(8.) ist also genau von derselben Form wie (4.). Daher ist

$$9.\quad y_{i2} = (z - a_i)^{1-\gamma} \cdot \Phi(p_0, \ldots, p_{\varrho-1}; \alpha_1 + 1 - \gamma, \ldots, \beta_{\varrho-1} + 1 - \gamma, 2 - \gamma; z - a_i)$$

und y_{i2} geht aus y_{i1} genau wie bei der hypergeometrischen Reihe einfach dadurch hervor, dass jede der Grössen α_λ, β_λ um $1 - \gamma$ vermehrt wird.

y_{i1}, y_{i2} aus (6.) und (9.) konstituieren im Falle *a*) ein zu $z = a_i$ gehöriges Fundamentalsystem.

Ist dagegen γ eine ganze Zahl oder Null, so treten im allgemeinen, und in dem Fall $\gamma = 1$ notwendig, Logarithmen in den Integralen auf. Diese Fälle sind daher jetzt gesondert zu behandeln!

Es sei

b) γ eine positive ganze Zahl.

Dann ist

$$0 \geqq 1 - \gamma;$$

wir bezeichnen deshalb in der üblichen Weise mit Rücksicht auf später Folgendes die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung und demgemäss die Elemente des Fundamentalsystems folgendermassen, wobei die Reihenfolge wesentlich ist:

$$r_{i1} = 1 - \gamma, \; r_{i2} = 0$$

$$10. \quad y_{i2} = \Phi(p_0 \ldots p_{\varrho-1}; \ldots \alpha_\lambda, \beta_\lambda \ldots; z - a_i).$$

Das andere Integral des Falles *a*) wird aber jetzt entweder mit y_{i2} identisch oder die Koeffizienten der Reihe werden von einer gewissen Stelle an unendlich, da $2 - \gamma = 1{,}0$ oder eine negative ganze Zahl ist. Man muss daher zu der von Herrn *Fuchs* (*Crelles* Journal, Bd. 66. Nr. 2) angegebenen Methode greifen, und das zweite Element des Fundamentalsystems zu erhalten, und setzen

$$y_{i1} = y_{i2}\left[\int x\, dz + C'\right]$$

woraus sich ergiebt

$$x = \frac{C \cdot e^{-\int \sum\limits_{k=1}^{k=\varrho} \frac{\gamma_k}{z - a_k} dz}}{y_{i2}^2}.$$

Also ist

$$11. \quad y_{i1} = y_{i2}\left[\int \frac{C \cdot \prod\limits_{k=1}^{k=\varrho} (z - a_k)^{-\gamma_k}}{y_{i2}^2} dz + C'\right]$$

wo C und C' noch willkürliche Konstanten sind.

Aus der zweiten Abhandlung des Herrn *Fuchs* (*Crelles* Journal Bd. 68, Nr. 1, I und 4, VII) ergiebt sich aber die schliessliche Form dieses Integrals

$$12. \quad y_{i1} = (z - a_i)^{1-\gamma} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} d_k (z - a_i)^k + B \cdot y_{i2} \cdot \log(z - a_i),$$

wo B eine Konstante, die $= 0$ sein kann, ausser wenn $\gamma = 1$.

Hier sind also noch die Koeffizienten d zu bestimmen! Zu dem Ende substituiert man den obigen Wert von y_{i1} in (4.) und findet, damit diese befriedigt wird, die folgende Rekursionsformel für die d

$$13.\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (k+\alpha'_\lambda)(k+\beta'_\lambda)\, d_{k+1-\lambda} = -B\cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda(\alpha'_\lambda+\beta'_\lambda+2k)\, c_{k+2-\gamma-\lambda}.$$

Dabei bedeuten die c wie früher die Koeffizienten der Reihe $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, α'_λ, β'_λ wie in (8.) $\alpha_\lambda+1-\gamma$, $\beta_\lambda+1-\gamma$, und dem entsprechend sollen die im folgenden sogleich auftretenden Koeffizienten der Reihe $\Phi(\alpha'_\lambda, \beta'_\lambda)$ mit c'_k bezeichnet werden.

Zur Abkürzung setzen wir noch die Summe auf der rechten Seite in (13.)

$$14.\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda(\alpha'_\lambda+\beta'_\lambda+2k)\, c_{k+2-\gamma-\lambda} = S_{k+1-\gamma}$$

oder — was dasselbe ist —

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda(\alpha_\lambda+\beta_\lambda+2k)\, c_{k+1-\lambda} = S_k.$$

Nun ist

$$S_{k+1-\gamma} = 0 \text{ für } k = 0,\ 1, \ldots, \gamma-3,$$

da für diese Werte von k in (14.) nur c mit negativem Index auftreten. Demnach stimmt für diese ersten Werte von k (13.) mit der Formel überein, welche die Koeffizienten c'_k bestimmt, und man hat

$$15.\quad d_0 = c'_0,\ d_1 = c'_1, \ldots, d_{\gamma-2} = c'_{\gamma-2};$$

dabei ist die Konstante C in (11.) so bestimmt worden, dass

$$d_0 = c'_0 = 1.$$

Bildet man nun (13.) für $k=\gamma-2$, so verschwindet der Koeffizient von $d_{\gamma-1}$; dieses bleibt also willkürlich, und man kann über C' in (11.) so verfügen, dass

$$16.\quad d_{\gamma-1} = 0;$$

dann giebt (13.) auch den Wert von B

$$17.\quad B p_0(1-\gamma) = c'_{\gamma-2}\cdot p_1(\alpha_1-1)(\beta_1-1) + \ldots + c'_{\gamma-\varrho}(\alpha_{\varrho-1}-1)(\beta_{\varrho-1}-1)$$

Nach dieser Formel lässt sich also immer entscheiden, ob ein Logarithmus wirklich auftritt oder nicht, und sie versagt nur für $\gamma=1$, wo das Erstere sicher geschieht. Dann aber kann man, wie weiter unten sich zeigt, B abgesehen von dem Wert 0 willkürlich bestimmen.

Die Berechnung der folgenden Koeffizienten

$$d_{\gamma+n} \quad (n \geqq 0)$$

erfolgt ebenso wie die Ableitung der Formel (5.) dieser Nummer. Mit derselben dort angewandten abkürzenden Bezeichnung ist nämlich

$$d^{\gamma+n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot p_0^{n+1} \cdot (n+1)! \; \gamma(\gamma+1) \ldots (\gamma+n)$$

$=$ der Determinante $D_{0,n}$, wenn in dieser die erste Vertikalreihe ersetzt wird durch

$$\begin{array}{l}
\sum_{\lambda=2}^{\varrho-1} A_0^\lambda \cdot c'_{\gamma-\lambda} + B \cdot S_0 \\
\sum_{\lambda=3}^{\varrho-1} A_1^\lambda \cdot c'_{\gamma-\lambda+1} + B \cdot S_1 \\
\sum_{\lambda=4}^{\varrho-1} A_2^\lambda \cdot c'_{\gamma-\lambda+2} + B \cdot S_2 \\
\quad\vdots \\
\sum_{\lambda=\varrho-1}^{\varrho-1} A_{\varrho-3}^\lambda \cdot c'_{\gamma-\lambda+\varrho-3} + B \cdot S_{\varrho-3} \\
\qquad B \cdot S_{\varrho-2} \\
\qquad B \cdot S_{\varrho-1} \\
\qquad B \cdot S_\varrho \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad B \cdot S_n \, .
\end{array}$$

Zerlegt man diese Determinante nach der ersten Vertikalreihe in zwei Determinanten und entwickelt jede nach der ersten Vertikalreihe, so wird:

$$18. \quad d_{\gamma+n} = B \cdot \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n+r+1} \cdot p_0^{r-n-1} \cdot S_r \cdot D_{r+1,n}}{(r+1)(r+2)\ldots(n+1) \cdot (\gamma+r)\ldots(\gamma+n)}$$
$$+ \sum_{r=2}^{\varrho-1} \sum_{\lambda=r}^{\varrho-1} \frac{(-1)^{n+r+1} \cdot p_0^{r-n-3} D_{r-1,n} \cdot A_{r-2}^\lambda \cdot c'_{\gamma-\lambda+r-2}}{(r-1) \cdot r \ldots (n+1) \cdot (\gamma+r-2) \ldots (\gamma+n)}$$

Dabei entsteht $D_{k,n}$ wieder aus $D_{0,n}$ durch Fortlassung der k ersten Horizontal- und Vertikalreihen.

Ist $B=0$, so fällt der erste Teil des Ausdrucks von $d_{\gamma+n}$ fort. Ist dagegen

$$\gamma = 1,$$

so kommen in dem zweiten Teil nur Grössen c' mit negativem Index vor, sodass derselbe $=0$ ist, und da nun jeder Koeffizient der Reihe den Faktor B hat, kann man diesem jeden beliebigen von Null verschiedenen Wert geben z. B.

$$B=1.$$

Dann ist für $\gamma=1$

$$d_{\gamma-1}=d_0=0$$

$$19. \quad d_{n+1}=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(-1)^{n+r+1}\cdot p_0^{r-n-1}\cdot S_r\cdot D_{r+1,\,n}}{[(r+1)\ldots\ldots(n+1)]^2}.$$

Damit ist auch für den Fall, dass γ eine positive ganze Zahl ist, ein Fundamentalsystem aufgestellt, nämlich

$$20. \quad \begin{cases} y_{i1}=(z-a_i)^{1-\gamma}\sum\limits_{k=0}^{k=\infty} d_k(z-a_i)^k+B\cdot\Phi(\alpha_\lambda,\beta_\lambda;\, z-a_i)\cdot\log(z-a_i) \\ y_{i2}=\Phi(\alpha_\lambda,\beta_\lambda;\; z-a_i), \end{cases}$$

wo B durch (17.) und die Koeffizienten d durch (15.), (16.), (18.) und, wenn $\gamma=1$, durch (19.) bestimmt sind.

Sei endlich

c) $\gamma=0$ oder eine negative ganze Zahl!

Es ist

$$r_{i1}=0,\ r_{i2}=1-\gamma$$

$$y_{i2}=(z-a_i)^{1-\gamma}\cdot\Phi(\alpha_\lambda+1-\gamma,\ \beta_\lambda+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z-a_i);$$

denn dann ist $2-\gamma$ eine positive ganze Zahl, die >1, also behält dieses Integral seine Bedeutung.

In diesem Fall ist nun Differentialgleichung (8.) genau so zu behandeln wie in dem Falle *b*) Differentialgleichung (4.). Mithin ist das Fundamentalsystem von (8.) in der Umgebung von $z=a_i$

$$21. \begin{cases} u_{i1}=(z-a_i)^{1-\gamma'}\sum\limits_{k=0}^{k=\infty} d'_k(z-a_i)^k+B'\cdot\Phi(\alpha_\lambda+1-\gamma,\beta_\lambda+1-\gamma,2-\gamma;z-a_i)\cdot\log(z-a_i) \\ u_{i2}=\Phi(\alpha_\lambda+1-\gamma,\ \beta_\lambda+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z-a_i). \end{cases}$$

Dabei entstehen alle gestrichenen Grössen aus den ungestrichenen, indem ersetzt wird

$$22. \quad \begin{cases} \alpha_\lambda \text{ durch } \alpha_\lambda+1-\gamma \\ \beta_\lambda \quad \text{,,} \quad \beta_\lambda+1-\gamma \\ \gamma \quad \text{,,} \quad 2-\gamma \end{cases}$$

Also ist das Fundamentalsystem von (4.):

$$23.\quad \begin{cases} y_{i1} = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} d'_k (z-a_i)^k + B'(z-a_i)^{1-\gamma} \cdot \Phi(\alpha_\lambda + 1 - \gamma, \beta_\lambda + 1 - \gamma, 2-\gamma; z-a_i) \cdot \log(z-a_i) \\ y_{i2} = (z-a_i)^{1-\gamma} \cdot \Phi(\alpha_\lambda + 1 - \gamma,\ \beta_\lambda + 1 - \gamma,\ 2-\gamma;\ z-a_i) \end{cases}$$

wo

$$24.\quad \begin{cases} d'_0 = c_0,\ d'_1 = c_1, \ldots, d'_{-\gamma} = c_{-\gamma} \\ d'_{1-\gamma} = 0 \\ d'_{n+2-\gamma} = B' \cdot \sum\limits_{r=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n+r+1} \cdot p_0^{r-n-1} \cdot S'_r \cdot D'_{r+1,\,n}}{(r+1)\ldots(n+1)\cdot(2-\gamma+r)\ldots(2-\gamma+n)} \\ \qquad + \sum\limits_{r=2}^{\varrho-1} \sum\limits_{\lambda=r}^{\varrho-1} \dfrac{(-1)^{n+r+1} \cdot p_0^{r-n-3} \cdot D'_{r-1,\,n} \cdot A^{\lambda\,\prime}_{r-2} \cdot C_{-\gamma-\lambda+r}}{(r-1)\ldots(n+1)\cdot(-\gamma+r)\ldots(2-\gamma+n)} \end{cases}$$

$$25.\quad B' \cdot p_0 \cdot (\gamma - 1) = c_{-\gamma} \cdot p_1 (\alpha_1 - \gamma)(\beta_1 - \gamma) + \ldots + c_{-\gamma-\varrho+2} (\alpha_{\varrho-1} - \gamma)(\beta_{\varrho-1} - \gamma).$$

Hiermit ist für jeden der endlichen singulären Punkte

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\varrho,$$

weil a_i ein beliebiger derselben war, ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt. — Für jeden derselben ist die vorgelegte Differentialgleichung (4.) I. in die der Form (4.) III. entsprechende Form zu setzen, wobei die

$$\alpha_\lambda^{(i)},\ \beta_\lambda^{(i)},\ \gamma^{(i)} \text{ (oder } \gamma_i)$$

für jeden Wert von i andere sind.

Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Entwicklungskoeffizienten der Differentialgleichung wird durch folgende Formeln dargestellt:

$$26.\quad \begin{cases} p_r^{(i)} = \sum\limits_{\lambda=r}^{\varrho-1} \binom{\lambda+1}{r+1} p_\lambda^{(k)} (a_i - a_k)^{\lambda - r} \quad (r = 0, 1, \ldots, \varrho - 1) \\ \text{speziell} \\ p_{\varrho-1}^{(i)} = p_{\varrho-1}^{(k)} = 1; \\ p_r^{(i)} (\alpha_r^{(i)} + \beta_r^{(i)} + 2r - 1) = \sum\limits_{\lambda=r}^{\varrho-1} \binom{\lambda}{r} p_\lambda^{(k)} (\alpha_\lambda^{(k)} + \beta_\lambda^{(k)} + 2\lambda - 1)(a_i - a_k)^{\lambda - r} \\ \text{speziell} \\ \alpha_{\varrho-1}^{(i)} + \beta_{\varrho-1}^{(i)} + 2\varrho - 3 = \alpha_{\varrho-1}^{(k)} + \beta_{\varrho-1}^{(k)} + 2\varrho - 3; \\ p_r^{(i)} (\alpha_r^{(i)} + r - 1)(\beta_r^{(i)} + r - 1) = \sum\limits_{\lambda=r}^{\varrho-1} \binom{\lambda-1}{r-1} p_\lambda^{(k)} (\alpha_\lambda^{(k)} + \lambda - 1)(\beta_\lambda^{(k)} + \lambda - 1)(a_i - a_k)^{\lambda - r} \\ \text{speziell} \\ (\alpha_{\varrho-1}^{(i)} + \varrho - 2)(\beta_{\varrho-1}^{(i)} + \varrho - 2) = (\alpha_{\varrho-1}^{(k)} + \varrho - 2)(\beta_{\varrho-1}^{(k)} + \varrho - 2) \end{cases}$$

[$\binom{m}{k}$ bedeutet hier den $k$ten Binomialkoeffizient von m].

Es ist also, wie es der Fall sein muss und auch schon aus den Gleichungen III. (3.) und II. (5.) hervorgeht,

$$\alpha^{(1)}_{\varrho-1} = \alpha^{(2)}_{\varrho-1} = \ldots\ldots = \alpha^{(\varrho)}_{\varrho-1} = \alpha_{\varrho-1}$$
$$\beta^{(1)}_{\varrho-1} = \beta^{(2)}_{\varrho-1} = \ldots\ldots = \beta^{(\varrho)}_{\varrho-1} = \beta_{\varrho-1},$$

was für die folgende Nummer von Wichtigkeit ist.

IV.

Es handelt sich nun darum, die Darstellung eines Fundamentalsystems, giltig in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, zu geben. Wir wählen für diese Umgebung das Äussere eines Kreises, der mit der grössten der Strecken

$$| a_i - a_k | \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, \varrho)$$

und a_i geschlagen ist. Dann müssen wir in die Differentialgleichung (4.) Nr. III substituieren

$$1. \quad (z - a_i) = \frac{1}{t}$$

und die Integrale der transformierten Differentialgleichung in der Umgebung von $t = 0$ studieren.

Führt man die Substition (1.) aus, so nimmt die Differentialgleichung zunächst folgende Gestalt an

$$2. \quad t^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} \cdot p_\lambda\, t^{\varrho-\lambda-1} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + t \cdot \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} p_\lambda (3 - \alpha_\lambda - \beta_\lambda - 2\lambda)\, t^{\varrho-\lambda-1} \cdot \frac{dy}{dt} +$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\varrho-1} p_\lambda (\alpha_\lambda + \lambda - 1)(\beta_\lambda + \lambda - 1) \cdot t^{\varrho-\lambda-1} \cdot y = 0.$$

Diese hat aber nicht mehr die unserer Untersuchung zu Grunde gelegte Form; wir müssen deshalb noch die in Nr. I ausgeführte Transformation vornehmen.

Die zu $t = 0$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung

$$s(s-1) + s(3 - \alpha_{\varrho-1} - \beta_{\varrho-1} - 2\varrho + 2) + (\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2)(\beta_{\varrho-1} + \varrho - 2) = 0$$

oder:

$$3. \quad s^2 - s(\alpha_{\varrho-1} + \beta_{\varrho-1} + 2\varrho - 4) + (\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2)(\beta_{\varrho-1} + \varrho - 2) = 0$$

hat die Wurzeln

$$4. \quad \begin{cases} \alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2 \\ \beta_{\varrho-1} + \varrho - 2 \end{cases}.$$

Wie aus der Bemerkung am Schluss der vorigen Nummer hervorgeht, sind diese Werte unabhängig davon, von welchem der im Endlichen gelegenen singulären Punkte oder ob überhaupt von einem solchen ausgehend man die gegenwärtige Untersuchung antritt.

Bezeichnet man zur Abkürzung die eine der beiden Wurzeln (4.) mit σ, so muss also in (2.) substituiert werden

$$5. \quad y = t^{\sigma} \cdot u,$$

wodurch sich für u die Differentialgleichung ergiebt

$$6. \quad \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} p_\lambda \cdot t^{\varrho-\lambda} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} p_\lambda (2\sigma + 3 - \alpha_\lambda - \beta_\lambda - 2\lambda)\, t^{\varrho-\lambda-1} \cdot \frac{du}{dt} +$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{\varrho-2} p_\lambda [\sigma(\sigma-1) + \sigma(3-\alpha_\lambda-\beta_\lambda-2\lambda) + (\alpha_\lambda+\lambda-1)(\beta_\lambda+\lambda-1)]\, t^{\varrho-\lambda-2} \cdot u = 0;$$

dabei ist im Koeffizient von u der Form wegen das Glied

$$p_0 (\alpha_0 - 1)(\beta_0 - 1) \cdot t^{\varrho-2}$$

hinzugefügt worden, welches aber nach Nr. III. (3.) und der dort getroffenen Festsetzung $= 0$ ist.

Um nun (6.) genau auf die Form (4.) Nr. III zu bringen, dividiert man einmal durch p_0, — damit der Koeffizient der höchsten Potenz von t im Koeffizient von $\frac{d^2u}{dt^2} = 1$ wird, — und kehrt gleichzeitig die Summationsbuchstaben um, wodurch sich ergiebt:

$$7. \quad \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} t^{\lambda+1} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} [2\sigma + 3 - \alpha_{\varrho-\lambda-1} - \beta_{\varrho-\lambda-1} - 2(\varrho-\lambda-1)] \cdot t^\lambda \cdot \frac{du}{dt}$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\varrho-1} \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} \Big[\sigma(\sigma-1) + \sigma\big(3 - \alpha_{\varrho-\lambda-1} - \beta_{\varrho-\lambda-1} - 2(\varrho-\lambda-1)\big) +$$
$$+ (\alpha_{\varrho-\lambda-1} + \varrho - \lambda - 2)(\beta_{\varrho-\lambda-1} + \varrho - \lambda - 2)\Big] \cdot t^{\lambda-1} \cdot u = 0.$$

Jetzt müssen endlich noch solche Grössen

$$\bar{\alpha}_\lambda, \ \bar{\beta}_\lambda, \ \bar{\gamma}$$

eingeführt werden, die den Gleichungen genügen

$$8. \begin{cases} \bar{\alpha}_\lambda + \bar{\beta}_\lambda + 2\lambda - 1 = 2\sigma + 3 - \alpha_{\varrho-\lambda-1} - \beta_{\varrho-\lambda-1} - 2(\varrho-\lambda-1) \\ (\bar{\alpha}_\lambda + \lambda - 1)(\bar{\beta}_\lambda + \lambda - 1) = \sigma(\sigma-1) + \sigma\big(3 - \alpha_{\varrho-\lambda-1} - \beta_{\varrho-\lambda-1} - 2(\varrho-\lambda-1)\big) + \\ \qquad + (\alpha_{\varrho-\lambda-1} + \varrho - \lambda - 2)(\beta_{\varrho-\lambda-1} + \varrho - \lambda - 2). \end{cases}$$

Setzt man hier ein

$$\sigma = \alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2,$$

so ergiebt sich aus (8.):

$$9. \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_\lambda = \alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1} \\ \bar{\beta}_\lambda = \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1} \end{array}\right\} (\lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ \varrho - 1) \\ \text{womit gleichzeitig definiert ist} \\ \bar{\gamma} = \bar{\alpha}_0 + \bar{\beta}_0 - 1 = \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-1}. \end{cases}$$

Dabei ist $\bar{\gamma}$, wie immer die durch diesen Buchstaben bezeichnete Grösse, bis auf einen p - Faktor, der hier $= \frac{p_{\varrho-1}}{p_0}$, das konstante Glied in der Entwicklung des Koeffizienten von $\frac{du}{dt}$.

Hätte man für σ die andere Wurzel (4.) eingesetzt, so würden sich in den Formeln (9.) nur $\alpha_{\varrho-1}$ und $\beta_{\varrho-1}$ mit einander vertauscht haben.

Die Differentialgleichung (7.) kann man also in die Form setzen

$$10. \quad \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} \cdot t^{\lambda+1} \frac{d^2u}{dt^2} +$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} \Big[(\alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}) + (\alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}) + 2\lambda - 1 \Big] \cdot t^\lambda \cdot \frac{du}{dt} +$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\varrho-1} \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} \Big[(\alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}) + \lambda - 1 \Big] \Big[(\alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}) + \lambda - 1 \Big] t^{\lambda-1} \cdot u = 0$$

und auf diese nun die Resultate der Untersuchungen in III. anwenden.

Es ist, wenn

a) $\alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-1}$ nicht $= 0$ oder eine ganze Zahl,

ein Fundamentalsystem von (10.)

$$11. \begin{cases} u_1 = \Phi \left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \ldots, \alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}, \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}, \ldots; t \right) \\ u_2 = t^{\beta_{\varrho-1} - \alpha_{\varrho-1}} \cdot \Phi \left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \ldots \beta_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}, \beta_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}, \ldots; t \right), \end{cases}$$

also ein Fundamentalsystem der vorgelegten Differentialgleichung:

$$12. \begin{cases} y^{(i)}_{\sim 1} = \left(\frac{1}{z - a_i} \right)^{\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2} \cdot \Phi \left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}, \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}; \frac{1}{z - a_i} \right) \\ y^{(i)}_{\sim 2} = \left(\frac{1}{z - a_i} \right)^{\beta_{\varrho-1} + \varrho - 2} \cdot \Phi \left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \beta_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}, \beta_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}; \frac{1}{z - a_i} \right); \end{cases}$$

die beiden Ausdrücke unterscheiden sich nur dadurch, dass durchweg $\alpha_{\varrho-1}$ und $\beta_{\varrho-1}$ mit einander vertauscht sind. Sie bilden eine vollständige Ana-

logie mit den bei der hypergeometrischen Reihe geltenden Formeln, in die sie übergehen, sobald $\varrho = 2$ gesetzt wird.

Sei nun

$b)$ $\alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-1}$ eine positive ganze Zahl,

so ist (10.) genau so zu behandeln wie (4.) III. im Fall b). Die dortigen Formeln ergeben für (10.) das Fundamentalsystem

$$13. \quad \begin{cases} u_1 = \Phi\left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \ldots \alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1}, \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1}, \ldots; t\right) \\ u_2 = t^{\beta_{\varrho-1} - \alpha_{\varrho-1}} \sum_{k=0}^{k=\infty} f_k \cdot t^k + B_\infty \cdot \Phi \text{ (wie in } u_1) \cdot \log t. \end{cases}$$

Dabei entsteht f_k aus d_k, B_∞ aus B

nach den Formeln (15.), (16.), (17.), (18.) voriger Nummer, wenn man allenthalben ersetzt:

$$14. \quad \begin{cases} p_\lambda \text{ durch } \frac{p_{\varrho-\lambda-1}}{p_0} \\ \alpha_\lambda \text{ durch } \alpha_{\varrho-1} + 1 - \alpha_{\varrho-\lambda-1} \\ \beta_\lambda \quad \text{,,} \quad \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-\lambda-1} \\ \gamma \quad \text{,,} \quad \alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-1} \quad . \end{cases}$$

Demnach hat ein Fundamentalsystem der vorgelegten Differentialgleichung in dem jetzt betrachteten Fall in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Darstellung

$$15. \begin{cases} y^{(i)}_{\infty 1} = \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\alpha_{\varrho-1}+\varrho-2} \cdot \Phi\left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \ldots \alpha_{\varrho-1}+1-\alpha_{\varrho-\lambda-1}, \alpha_{\varrho-1}+1-\beta_{\varrho-\lambda-1}, \ldots; \frac{1}{z-a_i}\right) \\ y^{(i)}_{\infty 2} = \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\beta_{\varrho-1}+\varrho-2} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} f_k \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^k + B_\infty \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\alpha_{\varrho-1}+\varrho-2} \cdot \Phi \text{ (wie in } y^{(i)}_{\infty 1}) \cdot \log\left(\frac{1}{z-a_i}\right) \end{cases}$$

Dabei kann $B_\infty = 0$ sein, in welchem Fall der Logarithmus fortfällt. B_∞ ist aber sicher von Null verschieden, wenn

$$\alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-1} = 1 \quad \text{d. h.}$$
$$\alpha_{\varrho-1} = \beta_{\varrho-1}.$$

Daraus folgt:

Wenn in einer Differentialgleichung der vorgelegten Art der Koeffizient der höchsten Potenz von z im Koeffizient von y das Quadrat irgend einer Grösse und der Koeffizient der höchsten Potenz von z im Koeffizient

von $\frac{dy}{dz}$ das doppelte derselben Grösse, vermehrt um 1, ist, so tritt in der Darstellung jedes Fundamentalsystems in der Umgebung des unendlich fernen Punktes sicher ein Logarithmus auf.

Ist endlich

$c)$ $\alpha_{\varrho-1} + 1 - \beta_{\varrho-1} = 0$ oder eine negative ganze Zahl,

so hat man einfach wieder die Resultate von III. $c)$ auf (10.) anzuwenden. Man sieht aber sofort, dass dies auf dasselbe hinauskommt, als wenn man in (15.) und sämtlichen zugehörigen Bestimmungsformeln allenthalben

$\alpha_{\varrho-1}$ und $\beta_{\varrho-1}$

mit einander vertauscht. Bezeichnen wir die dadurch aus f_k und B_∞ entstehenden Grössen mit

f'_k und B'_∞,

so ist also das Fundamentalsystem im vorliegenden Fall:

$$16. \begin{cases} y^{(i)}_{\infty 1} = \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\beta_{\varrho-1}+\varrho-2} \cdot \Phi\left(\frac{p_{\varrho-1}}{p_0}, \ldots, \frac{p_0}{p_0}; \ \ldots \beta_{\varrho-1}+1-\alpha_{\varrho-\lambda-1}, \beta_{\varrho-1}+1-\beta_{\varrho-\lambda-1}, \ldots; \frac{1}{z-a_i}\right) \\ y^{(i)}_{\infty 2} = \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\alpha_{\varrho-1}+\varrho-2} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} f'_k \cdot \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^k + B'_\infty \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{\beta_{\varrho-1}+\varrho-2} \cdot \Phi\,(\text{wie in } y^{(i)}_{\infty 1}) \cdot \log \frac{1}{z-a_i} \end{cases}$$

Wie schon angedeutet, ist es bei dieser Aufstellung eines Fundamentalsystems für den unendlich fernen Punkt gleichgiltig, von welchem der Punkte a_i man ausgeht. Die Untersuchung würde sich auch nicht wesentlich ändern, wenn man einen beliebigen nicht singulären Punkt, also Differentialgleichung (7.) Nr. II zu Grunde legte und in dieser substituierte

$$\frac{1}{z-z_0} = t.$$

V.

Nachdem in den vorigen Nummern für jeden nicht singulären und singulären Punkt der Differentialgleichung zweiter Ordnung ein Fundamentalsystem von Integralen aufgestellt worden ist, erheischt die vollständige Integration noch die Kenntnis der homogenen linearen Relationen, welche die Elemente eines Fundamentalsystems mit denen eines anderen verknüpfen.

Es sollen daher jetzt mittelst des von Herrn *Fuchs* im 75. Band des *Crelle*schen Journals gelehrten Verfahrens die Koeffizienten berechnet werden, welche den genannten Zusammenhang herstellen!

Hat eine Differentialgleichung nicht mehr als 3 singuläre Punkte, so geht der zu jedem der Punkte gehörige Konvergenzkreis durch einen der beiden andern hindurch und — bei drei Punkten — schneiden sich die Kreise der beiden am weitesten von einander entfernten Punkte in dem dritten. Die Kreise bilden in diesem Sinne eine zusammenhängende Gruppe. — Sind dagegen mehr als drei singuläre Punkte vorhanden, so werden im allgemeinen die zugehörigen Kreise nicht sämtlich so zusammenhängen, sich vielmehr in einzelne solche Gruppen sondern, zwischen denen Lücken entstehen. Diese können nun in dem vorliegenden Fall unter Anwendung von Nr. II überbrückt werden, indem man zwischen zwei getrennte Punkte jedes Mal nur einen einzigen Punkt einzuschalten braucht.

Bilden nämlich a_i, a_{i-1}, . . in dem bezeichneten Sinne eine Gruppe, so geht keiner der zugehörigen Konvergenzkreise durch einen Punkt, der nicht mehr zur Gruppe gehört. Verbindet man jeden Punkt der Gruppe mit allen andern nicht zu dieser gehörigen und ist

$$| a_i - a_k |$$

die kleinste dieser Strecken oder — wenn mehrere denselben kleinsten Wert haben — eine derselben, so enthält der um diese Line als Durchmesser, d. h. um den Punkt

$$\frac{a_i + a_k}{2}$$

geschlagene Kreis in seinem Innern keinen singulären Punkt. Dieser ganze Kreis bildet also die „Umgebung“ des Punktes $\frac{a_i + a_k}{2}$, in welcher das nach Nr. II für diesen Punkt dargestellte Fundamentalsystem giltig ist. Wird dieses sodann nach dem schon oben zitierten Verfahren des Herrn *Fuchs* sowohl durch das zu a_i als durch das zu a_k gehörige Fundamentalsystem ausgedrückt, so ergiebt sich daraus unmittelbar auch der Zusammenhang zwischen den beiden letzteren. — In gleicher Weise lassen sich alle etwa vorhandenen Zwischenräume der angegebenen Art zwischen den singulären Punkten beseitigen.

Da nun die Formeln, welche sich auf zwei derselben Gruppe angehörige Punkte beziehen, naturgemäss dieselben sind mit entsprechend veränderter Bedeutung einzelner Buchstaben wie in dem Fall von drei singulären Punkten, den Herr *Seifert* behandelt hat (a. a. O. siehe die Einleitung), und da das Gleiche von dem zum unendlich fernen singulären Punkt gehörigen Fundamentalsystem gilt, so dürfen wir uns darauf beschränken, die Rechnung für die beiden Punkte a_i und a_k durchzuführen.

Nach Nr. II werde für den Punkt $\frac{a_i + a_k}{2}$ ein Fundamentalsystem hergestellt und die dortigen Bezeichnungen beibehalten, nur auf $\frac{a_i + a_k}{2}$ statt auf z_0 bezogen:

$$1. \quad \begin{cases} y_1 = \Psi_0\left(z - \frac{a_i + a_k}{2}\right) \\ y_2 = \Psi_1\left(z - \frac{a_i + a_k}{2}\right); \end{cases}$$

die Koeffizienten dieser Reihen mögen wie in II. respektive mit b^0 und b^1 bezeichnet werden.

Ebenso liefert Nr. III für a_i und a_k die Fundamentalsysteme

$$y_{i1},\ y_{i2}$$
$$y_{k1},\ y_{k2}.$$

Alsdann müssen folgende Gleichungen mit konstanten Koeffizienten bestehen:

$$2. \quad \begin{cases} \Psi_0 = c_{11}^{(i)} y_{i1} + c_{12}^{(i)} y_{i2} \\ \Psi_1 = c_{21}^{(i)} y_{i1} + c_{22}^{(i)} y_{i2} \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \Psi_0 = c_{11}^{(k)} y_{k1} + c_{12}^{(k)} y_{k2} \\ \Psi_1 = c_{21}^{(k)} y_{k1} + c_{22}^{(k)} y_{k2} \end{cases}$$

Es handelt sich um die Berechnung der Grössen

$$c^{(i)} \text{ und } c^{(k)}.$$

a) $1 - \gamma^i$ habe einen positiven reellen Teil, wobei also der Fall mit eingeschlossen ist, dass γ^i eine negative ganze Zahl oder Null ist.

Dann gilt das Fundamentalsystem (23.) III, welches aber in (6.), (9.) derselben Nummer übergeht, wenn γ^i nicht eine negative ganze Zahl oder Null ist. Bildet man mit diesen Werten von y_{i1}, y_{i2} die erste der

Gleichungen (2.) und setzt $z = a_i$, so bleibt rechts nur $c_{11}^{(i)}$, und da man a priori weiss, dass diese Koeffizienten einen wohlbestimmten, endlichen Wert haben, so ergiebt sich daraus, dass in diesem Fall die Reihe Ψ_0 noch für den Punkt $z = a_i$, der auf der Peripherie ihres Konvergenzkreises liegt, konvergiert. Es ist

$$4. \quad c_{11}^{(i)} = \Psi_0\left(\frac{a_i - a_k}{2}\right)$$

Genau so ergiebt sich aus der zweiten der Gleichungen (2.)

$$5. \quad c_{21}^{(i)} = \Psi_1\left(\frac{a_i - a_k}{2}\right)$$

Hat γ^k dieselbe Eigenschaft, die hier von γ^i vorausgesetzt wurde, so sind

$$6. \quad c_{11}^{(k)} = \Psi_0\left(\frac{a_k - a_i}{2}\right)$$

$$7. \quad c_{21}^{(k)} = \Psi_1\left(\frac{a_k - a_i}{2}\right).$$

Die beiden anderen Koeffizienten erfordern eine etwas umständlichere Rechnung.

Es ist

$$8. \quad c_{12}^{(i)} = \begin{vmatrix} y_{i1}', & y_{i1} \\ \Psi_0', & \Psi_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_{i1}', & y_{i1} \\ y_{i2}', & y_{i2} \end{vmatrix} (a_i),$$

(d. h. die ganze rechte Seite ist für $z = a_i$ zu bilden!)

Multipliziert man nach der Vorschrift des Herrn *Fuchs* (a. a. O.) in der Nennerdeterminante die erste Vertikale mit $z - a_i$, die zweite Horizontale mit $(z - a_i)^{\gamma^i - 1}$ (denn es ist in diesem Fall $r_{i1} = 0$, $r_{i2} = 1 - \gamma^i$), so wird diese Determinante für $z = a_i$

$$\gamma^i - 1.$$

Also ist

$$(\gamma^i - 1)\, c_{12}^{(i)} = \begin{vmatrix} y_{i1}'(z - a_i), & y_{i1} \\ \Psi_0'(z - a_i), & \Psi_0 \end{vmatrix} \cdot (z - a_i)^{\gamma^i - 1}_{(a_i)}$$

Bei der Ausrechnung dieser Determinante braucht man in den Gliedern der ersten Horizontalreihe nur bis zu einer solchen Potenz von $z - a_i$ zu gehen, deren Exponent nicht grösser ist als $1 - \gamma^i$. Setzt man die Werte ein, so ist die rechte Seite

$$(z-a_i)^{\gamma^i-1}\left|\begin{matrix}\sum\limits_{r=0}^{\infty} r d_r'(z-a_i)^r + B'(1-\gamma^i)(z-a_i)^{1-\gamma^i}\Phi\cdot\log(z-a_i) & \sum\limits_{r=0}^{\infty} d'_r(z-a_i)^r \\ +B'(z-a_i)^{2-\gamma^i}\Phi'\cdot\log(z-a_i)+B'(z-a_i)^{1-\gamma^i}\cdot\Phi, & +B'(z-a_i)^{1-\gamma^i}\cdot\Phi\log(z-a_i) \\ \Psi_0'(z-a_i) \quad , & \Psi_0\end{matrix}\right|_{(a_i)}$$

Nun sei

$$[1-\gamma^i]=\lambda,$$

d. h. λ die grösste ganze Zahl in $1-\gamma^i$; dann brauchen die Summationen über r blos bis $r=\lambda$ erstreckt zu werden. In Φ braucht man blos noch den ersten Koeffizienten 1 beizubehalten, das Glied mit Φ' liefert gar keinen Beitrag für $z=a_i$. $B'(z-a_i)^{1-\gamma^i}$ multipliziert mit Ψ_0 und $(z-a_i)^{\gamma^i-1}$ ist für $z=a_i$

$$B'\cdot c_{11}^{(i)};$$

also wird der Ausdruck schon bedeutend einfacher

$$(\gamma^i-1)\,c_{12}^{(i)}=B'\cdot c_{11}^{(i)}$$

$$+(z-a_i)^{\gamma^i-1}\left|\begin{matrix}\sum\limits_{r=0}^{\lambda} r\,d'_r(z-a_i)^r & \sum\limits_{r=0}^{\lambda} d_r'(z-a_i)^r \\ +B'(1-\gamma_i)(z-a_i)^{1-\gamma^i}\log(z-a_i), & +B'(z-a_i)^{1-\gamma^i}\log(z-a_i) \\ \Psi_0'(z-a_i) \quad , & \Psi_0\end{matrix}\right|_{(a_i)}$$

oder

$$(\gamma^i-1)\,c_{12}^{(i)}=B'\,c_{11}^{(i)}+B'\,(1-\gamma^i)\log(z-a_i)\,.\,\Psi_0+$$
$$+\sum_{r=0}^{\lambda} r\,d'_r\,(z-a_i)^{r+\gamma^i-1}\cdot\Psi_0-\sum_{r=0}^{\lambda} d'_r\,(z-a_i)^{r+\gamma^i}\cdot\Psi_0'.$$

Entwickelt man nun $\log(z-a_i)$ und die sämtlichen in dem Ausdruck verbliebenen Potenzen von $z-a_i$ nach Potenzen von $z-\frac{a_i+a_k}{2}$ und setzt dann $z=a_i$, so erhält der Ausdruck folgende Gestalt:

9. $$c_{12}^{(i)}(\gamma^i-1)=B'\cdot c_{11}^{(i)}+B'(\gamma^i-1)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\cdot\sum_{m=0}^{l}\frac{2^{l-m}\cdot b_m^0}{(l-m)\,(a_i-a_k)^{l-m}}$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\cdot\sum_{r=0}^{\lambda} d'_r\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a_k-a_i}{2}\right)^{r+\gamma^i-l+m}\times$$
$$\times\left[r\cdot\binom{r+\gamma^i-1}{l-m}\cdot\frac{2}{a_k-a_i}\,b_m^0-\binom{r+\gamma^i}{l-m}\,(m+1)\,b_{m+1}^0\right]$$

Hierin möge bedeuten:

$$\left[\frac{2^{l-m}}{(l-m)(a_i-a_k)^{l-m}}\right]_{m=l} = \log\frac{2}{a_k-a_i}:$$

das Anfangsglied der Entwicklung von $\log(z-a_i)$.

Der Ausdruck (9) vereinfacht sich wesentlich, wenn γ^i nicht eine ganze Zahl oder Null ist, weil dann $B'=0$ und die beiden ersten Teile fortfallen, während $d'_r = c_r$ ist.

Ein Blick auf die Gleichungen (2.) dieser Nummer zeigt, dass aus (9.) der Wert von $c_{22}^{(i)}$ entsteht, indem man ersetzt

$$\begin{array}{rccc} & c_{11}^{(i)} & \text{durch} & c_{21}^{(i)} \\ & \Psi_0 & \text{„} & \Psi_1 \\ \text{d. h.} & b_m^0 & \text{„} & b_m^1. \end{array}$$

Wenn γ^k denselben Charakter hat, wie er jetzt von γ^i vorausgesetzt wurde, so entstehen

$$c_{12}^{(k)} \text{ und } c_{22}^{(k)}$$

aus $c_{12}^{(i)}$ und $c_{22}^{(i)}$ respektive einfach durch Vertauschung von i und k.

Sei nun:

b) $1-\gamma^i<0$ im reellen Teil, wobei eingeschlossen, dass γ^i eine positive ganze Zahl, die >1 ist.

Für y_{i1}, y_{i2} sind daher die Werte aus III. (20.) zu setzen und

$$r_{i1} = 1-\gamma^i, \; r_{i2} = 0.$$

Versucht man auch in diesem Fall in die Gleichungen (2.) direkt $z=a_i$ einzusetzen, so zeigt sich, dass die Reihen Ψ_0, Ψ_1 für $z=a_i$ nicht mehr konvergieren, weil die rechte Seite unendlich wird; man muss deshalb zur Berechnung aller vier Grössen $c^{(i)}$ das kompliziertere Verfahren einschlagen.

Die Determinante des Fundamentalsystems y_{i1}, y_{i2}, multipliziert mit $(z-a_i)^{\gamma^i}$, hat aber wieder für $z=a_i$ den Wert γ^i-1. Daher ist:

$$c_{11}^{(i)}(\gamma^i-1) = \begin{vmatrix} \Psi'_0(z-a_i), & \Psi_0 \\ \Phi'(z-a_i), & \Phi \end{vmatrix} (z-a_i)^{\gamma^i-1}_{(a_i)}$$

Hier braucht man von den Entwicklungen von $\Phi'\cdot(z-a_i)$ und Φ nur die 0ten Potenzen beizubehalten; also liefert $\Phi'\cdot(z-a_i)$ gar keinen Beitrag, und es ist

$$c_{11}^{(i)}(\gamma_i-1) = \left[\Psi'_0\cdot(z-a_i)\right]_{(a_i)}.$$

Entwickelt man $(z-a_i)^{\gamma^i}$ nach Potenzen von $z-\frac{a_i+a_k}{2}$ und setzt dann $z=a_i$, so folgt

$$10.\quad c_{11}^{(i)}(\gamma^i-1)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\cdot\sum_{m=0}^{l}\binom{\gamma^i}{l-m}\left(\frac{a_k-a_i}{2}\right)^{\gamma^i-l+m}\cdot(m+1)\,b_{m+1}^0$$

Ebenso erhält man:

$$11.\quad c_{21}^{(i)}(\gamma^i-1)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\cdot\sum_{m=0}^{l}\binom{\gamma^i}{l-m}\left(\frac{a_k-a_i}{2}\right)^{\gamma^i-l+m}\cdot(m+1)\,b_{m+1}^1.$$

Ferner ist

$$(\gamma^i-1)\,c_{12}^{(i)}=\left|\begin{matrix} y_{i1}'(z-a_i)^{\gamma^i}, & y_{i1}(z-a_i)^{\gamma^i-1} \\ \Psi_0'(z-a_i), & \Psi_0 \end{matrix}\right|_{(a_i)}$$

Verfährt man analog wie vorher, so ergiebt sich

$$12.\quad c_{12}^{(i)}(\gamma^i-1)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\sum_{r=0}^{\lambda}d_r\left\{\sum_{m=0}^{r}(r-\gamma^i+1)\binom{r}{m}\left(\frac{a_k-a_i}{2}\right)^{r-m}b_{l-m}^0-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{r+1}\binom{r+1}{m}\left(\frac{a_k-a_i}{2}\right)^{r+1-m}\cdot(l-m+1)\,b_{l-m+1}^0\right\}$$

$$+B\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\left\{c_{11}^{(i)}(\gamma^i-1)\frac{2^l}{l(a_i-a_k)^l}+\sum_{m=0}^{l}\binom{\gamma^i-1}{m}\left(\frac{a_k-a_i}{2}\right)^{\gamma^i-1-m}\cdot b_{l-m}^0\right\},$$

woraus $c_{22}^{(i)}$ hervorgeht, wenn $c_{11}^{(i)}$ durch $c_{21}^{(i)}$ und b^0 durch b^1 ersetzt wird.

Es bleibt endlich noch der besondere Fall zu betrachten, dass

c) $\gamma=1$.

Die Determinante des in diesem Fall giltigen Fundamentalsystems [s. (19.) und (20.) Nr. III.] ist, multipliziert mit $z-a_i$, für $z=a_i$ $=1$.

Dann ergeben sich die $c^{(i)}$, wie folgt:

$$13.\quad c_{11}^{(i)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\left[l\cdot b_l^0+(l+1)\,b_{l+1}^0\cdot\frac{a_k-a_i}{2}\right]$$

$$14.\quad c_{21}^{(i)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\left[l\cdot b_l^1+(l+1)\,b_{l+1}^1\cdot\frac{a_k-a_i}{2}\right]$$

$$15.\quad c_{12}^{(i)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\left[b_l^0+c_{11}^{(i)}\frac{2^l}{l(a_i-a_k)^l}\right]$$

$$16.\quad c_{22}^{(i)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a_i-a_k}{2}\right)^l\left[b_l^1+c_{21}^{(i)}\frac{2^l}{l(a_i-a_k)^l}\right]$$

Für alle diese Formeln gilt die bei (9.) gemachte Bemerkung.

Die Werte von

$$c_{11}^{(k)},\ c_{12}^{(k)},\ c_{21}^{(k)},\ c_{22}^{(k)}$$

ergeben sich durch Vertauschung von i und k je nach der Beschaffenheit von γ^k aus den Formeln in a), b) oder c).

Bezeichnet man nun die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} c_{11}^{(i)}, & c_{12}^{(i)} \\ c_{21}^{(i)}, & c_{22}^{(i)} \end{pmatrix} = S_i$$

$$\begin{pmatrix} c_{11}^{(k)}, & c_{12}^{(k)} \\ c_{21}^{(k)}, & c_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = S_k,$$

so ist auf das Fundamentalsystem

$$y_{i1},\ y_{i2}$$

die Substitution

$$17. \quad S_i\, S_k^{-1} = S_{ik}$$

anzuwenden, um y_{k1}, y_{k2} linear und homogen in y_{i1}, y_{i2} ausgedrückt zu erhalten.

Hat man die sämtlichen Substitutionen S_{ik} aufgestellt, so beherrscht man den Verlauf eines beliebigen Integrals vollständig. Denn es ist sehr einfach, schliesslich auch noch die Substitutionen anzugeben, die ein Fundamentalsystem beim Umlauf von z um denjenigen Punkt erleidet, zu dem es gehört.

Diese Substitution ist für III. (6.), (9.)

$$18. \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & e^{2\pi i(1-\gamma)} \end{pmatrix}$$

Aus III. (20.) wird beim Umlauf

$$(y_{i1})' = e^{2\pi i(1-\gamma)} \Sigma\, d_k\, (z - a_i)^k + B \cdot \Phi\, (\log\,(z - a_i) + 2\pi i)$$

$$(y_{i2})' = y_{i2}.$$

Da nun

$$e^{2\pi i(1-\gamma)} = 1,$$

wenn $\gamma = 0$ oder eine ganze Zahl, in jedem anderen Fall aber $B = 0$ ist, so kann man in $(y_{i1})'$ $B \cdot \Phi \log\,(z - a_i)$ noch mit $e^{2\pi i(1-\gamma)}$ multiplizieren und erhält so die Substitution

$$19. \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i(1-\gamma)}, & 2\pi i \cdot B \\ 0\ , & 1 \end{pmatrix},$$

die für $\gamma = 1$ wird

$$\begin{pmatrix} 1, & 2\pi i \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu III. (23.) gehört die Substitution

$$20. \quad \begin{pmatrix} 1, & 2\pi i \cdot B' \\ 0, & e^{2\pi i(1-\gamma)} \end{pmatrix}.$$

Einem positiven Umlauf von z um den unendlich fernen Punkt, d. h. einem positiven Umlauf von t um den Nullpunkt entsprechen folgende Substitutionen:

für IV. (12.)

$$21. \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)}, & 0 \\ 0 & , e^{2\pi i(\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \end{pmatrix}$$

für IV. (15.)

$$22. \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)} & , \quad 0 \\ 2\pi i \cdot B_\infty \cdot e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)}, & e^{2\pi i(\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \end{pmatrix}$$

für (IV.) (16.)

$$23. \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i(\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2)} & , \quad 0 \\ 2\pi i \cdot B'_\infty \cdot e^{2\pi i(\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2)}, & e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \end{pmatrix}$$

Zu den beiden letzten Formeln ist noch eine Bemerkung zu machen: Es geht nämlich z. B. in IV. (15.) beim Umlauf um $t = 0$ $y^{(i)}_{\infty 2}$ über in

$$e^{2\pi i(\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \cdot t^{\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2} \cdot \Sigma f_k \cdot t^k + B_\infty \cdot e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \cdot t^{\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2} \cdot \Phi \cdot \log t$$
$$+ 2\pi i \, B_\infty \, e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \cdot t^{\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2} \cdot \Phi,$$

während unter Anwendung der Substitution (22.) im zweiten Glied stehen würde

$$e^{2\pi i(\beta_\varrho - 1 + \varrho - 2)} \text{ statt } e^{2\pi i(\alpha_\varrho - 1 + \varrho - 2)}.$$

Beide Grössen sind aber nur dann verschieden, wenn $B_\infty = 0$ ist; also durfte man die Formel so schreiben. — Aehnlich verhält es sich mit (23.).

VI.

Es soll in dieser Nummer noch näher auf den Charakter der Reihe eingegangen werden, zu der die Differentialgleichung geführt hat!

Wir betrachten aber die Reihe

$$1. \quad \Phi(p_0, p_1, \ldots, p_{\varrho-1}; \ldots \alpha_\lambda, \beta_\lambda, \ldots, \gamma; z - a_i)$$

wie sie durch die Rekursionsformel (2.) Nr. III

$$2. \quad \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} p_\lambda (k + \alpha_\lambda)(k + \beta_\lambda) c_{k-\lambda+1} = 0$$

oder durch die Differentialgleichung (4.) III. definiert wird, wenn die

$$\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma$$

willkürlich sind, d. h. nicht erst durch die Definitionsgleichungen (3.) (ebendaselbst) bestimmt werden und dadurch von den p_λ oder $a_1, \ldots, a_\varrho$ abhängen.

(Es sei hier bemerkt, dass auch in Kap. IV und V der Dissertation des Herrn *Seifert* diese Voraussetzung gemacht werden muss, da sonst diejenigen Resultate, bei denen $s = 0$ wird, nicht mehr richtig sind.)

1. Zunächst ist selbstverständlich, dass in der Reihe (1.) je zwei Elemente α und β mit gleichem Index, einschliesslich α_0, β_0, mit einander vertauscht werden können.

Statt der Grössen p_λ kann man in die Bezeichnung der Reihe auch die Grössen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$$

aufnehmen, so dass dieselbe heisst

$$3. \quad \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_\varrho; \ldots \alpha_\lambda, \beta_\lambda \ldots, \gamma; z - a_i)$$

Durch die a sind die p vollständig, umgekehrt die a durch die p bis auf eine allen gemeinsame additive Konstante bestimmt, da durch die p nur die Differenzen

$$a_i - a_k \; (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots \varrho)$$

als Wurzeln der Gleichung

$$x^{\varrho-1} + p_{\varrho-2} \cdot x^{\varrho-2} + \ldots + p_1 x + p_0 = 0$$

bestimmt sind.

Substituiert man in (4.) III.

$$z = z' - c.$$

wo c eine Konstante, so ergiebt sich die Formel

$$4. \quad \Phi(a_1 + c, a_2 + c, \ldots, a_\varrho + c) = \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_\varrho),$$

die nichts anderes aussagt, als was soeben schon hervorgehoben wurde.

Substituiert man in die Differentialgleichung

$$z = \frac{z'}{c},$$

so folgt

5. $\Phi(a_1 c, \ a_2 c, \ldots, a_\varrho c; \ldots; c(z - a_i) = \Phi(a_1, a_2 \ldots, a_\varrho; \ldots; z - a_i)$

Aus (4.) und (5.) folgt, dass sich zwei der singulären Punkte immer in 0 und 1 legen lassen: dies ist aber selbstverständlich, weil es nur auf eine Aenderung des Koordinatensystems und der Längeneinheit hinauskommt.

Es lässt sich aber aus den beiden Formeln auch ein interessanter Schluss ziehen auf die Zahl und Lage der Punkte $a_1 \ldots a_\varrho$, wenn man verlangt, dass die Reihe Φ nur solche Potenzen von $z - a_i$ enthalten soll, deren Exponenten durch eine beliebige ganze Zahl teilbar sind.

Sollen alle Exponenten

$$\equiv 0 \bmod k$$

sein, so heisst das, es sollen, wenn ω eine primitive $k$te Wurzel der Einheit bedeutet, die Gleichungen stattfinden:

6. $$\Phi(a_1 \ldots a_\varrho; \ldots; z - a_i) = \Phi[a_1 \ldots a_\varrho; \ldots; \omega(z - a_i)] = \ldots$$
$$\ldots = \Phi[a_1 \ldots a_\varrho; \ldots; \omega^{k-1}(z - a_i)]$$

Nun ist nach (5.)

$$\Phi(a_1 \ldots a_\varrho; \ldots; z - a_i) = \Phi[\omega a_1, \ldots, \omega a_\varrho; \ldots; \omega(z - a_i)],$$

also muss dann sein:

$$\Phi[\omega a_1, \ldots, \omega a_\varrho; \ldots; \omega(z - a_i)] = \Phi[a_1 \ldots a_\varrho; \ldots; \omega(z - a_i)].$$

Damit diese Gleichung bestehen kann, müssen die Grössen

$$\omega a_1, \ \omega a_2, \ldots, \omega a_\varrho$$

mit

$$a_1, \ a_2, \ldots, a_\varrho$$

in irgend einer Reihenfolge bis auf eine allen gemeinsame additive Konstante übereinstimmen. Diese bestimmt sich dadurch, dass a_i links jedenfalls wieder an seiner Stelle erscheinen muss, und, da

$$\omega a_i - (\omega - 1) a_i = a_i,$$

so müssen die Grössen

$$\omega a_1 - (\omega - 1) \ a_i, \ldots, a_i, \ldots, \omega a_\varrho - (\omega - 1) a_i$$

mit

$$a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_\varrho$$

in irgend einer Reihenfolge übereinstimmen.

Sei

$$a_{\lambda_1} = \omega \cdot a_{\lambda_2} - (\omega - 1)\, a_i,$$

so ist

$$a_{\lambda_1} - a_i = \omega\,(a_{\lambda_2} - a_i),$$

wobei a_{λ_1} und a_{λ_2} notwendig von einander verschieden sind.

Auf dieselbe Weise folgert man aus der Gleichung

$$\Phi\,[a_1, \ldots, a_\varrho; \ldots, \omega\,(z - a_i)] = \Phi\,[a_1 \ldots a_\varrho; \ldots; \omega^2 (z - a_i)]$$
$$\omega\,(a_{\lambda_2} - a_i) = \omega^2\,(a_{\lambda_3} - a_i),$$

wo a_{λ_3} von a_{λ_2} und a_{λ_1} verschieden, wenn $k > 2$, da ω eine primitive $k$te Einheitswurzel ist.

So fortfahrend, erhält man das Gleichungssystem:

7. $$a_{\lambda_1} - a_i = \omega\,(a_{\lambda_2} - a_i) = \omega^2\,(a_{\lambda_3} - a_i) = \ldots = \omega^{k-1}\,(a_{\lambda_k} - a_i),$$

wo alle a_λ von einander verschieden sind. Sie bilden aber auch eine hiermit abgeschlossene Gruppe; denn von welchem von ihnen auch immer ausgehend man wie mit a_{λ_1} verfährt: man kann nie zu einem a_λ gelangen, welches von diesen k Grössen verschieden ist.

Die Gleichungen (7.) besagen nun:

1. alle a_λ sind gleich weit von a_i entfernt, liegen also auf der Peripherie eines Kreises um a_i,

2. sie teilen diese Kreisperipherie in k gleiche Teile.

Ist nun a'_{λ_1} ein von diesen k a_λ verschiedenes a, so liefert es eine neue Gruppe von derselben Gliederzahl u. s. w.

Das Resultat ist also:

Damit die Reihe Φ nur solche Potenzen von $z - a_i$ enthalte, deren Exponenten durch k teilbar sind, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\varrho \equiv 1 \bmod k$$

und die $\varrho - 1$ übrigen Punkte sich um a_i so gruppieren, dass je k die Peripherie eines um a_i geschlagenen Kreises in gleiche Teile teilen.

Die Funktion $\psi(z)$ hat also dann die Form

8. $$(z - a_i)\left[(z - a_i)^k - b_1^k\right]\left[(z - a_i)^k - b_2^k\right] \ldots,$$

und das Resultat kommt natürlich darauf hinaus, dass von den Grössen p nur diejenigen von Null verschieden sind, deren Index $\equiv 0 \bmod k$. Man

sieht dann sowohl aus der Rekursionsformel (2.) als aus der Determinante (5.) III., dass auch nur die Koeffizienten c_λ von Null verschieden sind, bei denen

$$\lambda \equiv 0 \bmod k.$$

k kann dabei alle Werte bis $\varrho - 1$ durchlaufen.

Ist $k = \varrho - 1$, so geht die Differentialgleichung (4.) III. durch die Substitution

$$\left(\frac{z - a_i}{b}\right)^{\varrho-1} = x$$

in die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe über; es ist

$$9. \quad \Phi(p_0, 0, 0, \ldots, p_{\varrho-1}; \ldots \alpha_\lambda, \beta_\lambda, \ldots; z - a_i) =$$
$$= F\left(\frac{\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2}{\varrho - 1}, \frac{\beta_{\varrho-1} + \varrho - 1}{\varrho - 1}, \frac{\gamma + \varrho - 2}{\varrho - 1}, x\right).$$

2. Es sollen im Folgenden die

kontiguen Funktionen der Reihe $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda, x)$

(wie wir jetzt kurz schreiben wollen) definiert und eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 1$ derselben hergeleitet werden (vergl. auch *Seifert*, Kap. V. § 3).

Nach (5.) Nr. III ist der $(n+1)$te Koeffizient der Reihe $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$

$$10. \quad c_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{D_{0,n}}{\triangle_{0,n}},$$

wobei sich die Bedeutung von $\triangle_{0,n}$ aus Vergleichung mit jener Formel ergiebt. Es bedeute ferner wieder $D_{r,n}$ die aus $D_{0,n}$ durch Fortlassung der r ersten Horizontal- und Vertikalreihen entstehende Determinante; ebenso sei

$$\triangle_{r,n} = \frac{\triangle_{0,n}}{p_0^r \cdot r! \; \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r-1)},$$

oder

$$\triangle_{r,n} = p_0^{n+1-r}(r+1)(r+2)\ldots(n+1)\cdot(\gamma+r)\ldots(\gamma+n)$$

Dann wollen wir als $r$te kontigue Funktion von $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ die Reihe

$$11. \quad \Phi_r(\alpha_\lambda + r, \beta_\lambda + r) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots \varrho - 1)$$

bezeichnen, die aus $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ entsteht, indem alle Elemente, einschliesslich α_0, β_0 oder 1 und γ um dieselbe positive ganze Zahl r vermehrt werden. Der Index r muss deshalb dem Φ beigelegt werden, weil Φ_r dadurch, dass auch $\alpha_0 = 1$ um r vermehrt wurde, eine andere Funktion als Φ geworden ist. Ihre Rekursionsformel lautet

$$12. \quad \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} p_\lambda (\alpha_\lambda + r + k)(\beta_\lambda + r + k)\, c_{k-\lambda+1}^{(r)} = 0,$$

der wir die Bestimmung hinzufügen, dass alle $c_k^{(r)}$ mit negativem Index $k = 0$ sind und

$$c_0^{(r)} = 1.$$

Dann ist der $(n+1)$te Koeffizient von $\Phi_r(\alpha_\lambda + r, \beta_\lambda + r)$

$$13. \quad c_{n+1}^{(r)} = (-1)^{n+1} \frac{D_{r,\, n+r}}{\triangle_{r,\, n+r}}.$$

Entwickelt man nun in (10.) $D_{0,n}$ nach der ersten Vertikalreihe, so folgt

$$14. \quad c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\triangle_{0,\, n}} \Big[p_1 \alpha_1 \beta_1 D_{1,\, n} -$$

$$- p_2(\alpha_2+1)(\beta_2+1) \cdot p_0 \cdot 1 \cdot \gamma \cdot D_{2,n} + p_3(\alpha_3+2)(\beta_3+2) p_0^2 \cdot 2!\, \gamma(\gamma+1) \cdot D_{3,n} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\varrho-2} (\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2)(\beta_{\varrho-1} + \varrho - 2) p_0^{\varrho-2} (\varrho-2)!\, \gamma(\gamma+1) \ldots (\gamma+\varrho-3) \cdot D_{\varrho-1,\, n} \Big]$$

oder

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \Big[\frac{p_1\, \alpha_1\, \beta_1}{p_0 \cdot 1 \cdot \gamma} \frac{D_{1,\, n}}{\triangle_{1,\, n}} - \frac{p_2(\alpha_2+1)(\beta_2+1)}{p_0\, 2\, (\gamma+1)} \cdot \frac{D_{2,\, n}}{\triangle_{2,\, n}} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\varrho-2} \frac{(\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2)\, (\beta_{\varrho-1} + \varrho - 2)}{p_0 (\varrho - 1)(\gamma + \varrho - 2)} \cdot \frac{D_{\varrho-1,\, n}}{\triangle_{\varrho-1,\, n}} \Big]$$

Hieraus ergiebt sich unter Berücksichtigung von (13.)

$$15. \quad \Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) = 1 - \frac{p_1\, \alpha_1\, \beta_1}{p_0 \cdot 1 \cdot \gamma} x \cdot \Phi_1(\alpha_\lambda + 1) - \frac{p_2(\alpha_2+1)(\beta_2+1)}{p_0 \cdot 2 \cdot (\gamma+1)} x^2 \cdot \Phi_2(\alpha_\lambda + 2) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{(\alpha_{\varrho-1} + \varrho - 2)(\beta_{\varrho-1} + \varrho - 2)}{p_0 (\varrho - 1)(\gamma + \varrho - 2)} \cdot x^{\varrho-1} \cdot \Phi_{\varrho-1}(\alpha_\lambda + \varrho - 1)$$

(Der Kürze halber ist immer nur ein Argument von Φ angegeben).

Iteriert man diese Formel, was gestattet ist, und subtrahiert den erhaltenen Ausdruck von (15.), so findet man nach einfacher Umformung:

$$16. \quad p_0 \cdot \varrho!\, \gamma(\gamma+1) \ldots (\gamma + \varrho - 1) \cdot \Phi(\alpha) =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} \frac{\varrho!\, \gamma \ldots (\gamma + \varrho - 1)}{(\lambda+1)(\gamma+\lambda)} \Big[p_\lambda(\alpha_\lambda + \lambda)(\beta_\lambda + \lambda) - p_{\lambda+1}(\alpha_{\lambda+1} + \lambda)(\beta_{\lambda+1} + \lambda) \cdot x \Big] \cdot x^\lambda \cdot \Phi_{\lambda+1}(\alpha + \lambda + 1),$$

worin $p_\varrho = 0$ zu setzen ist.

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Formel IX Nr. 10 Sekt. I der Abhandlung von *Gauss* „Disquisitiones generales circa seriem etc.“

(Werke, Bd. 3). Der besseren Uebersichtlichkeit wegen soll dieselbe für $\varrho = 3$ wiederholt werden

$$17. \quad 3!\, p_0 \gamma (\gamma + 1)(\gamma + 2) \cdot \Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot (\gamma + 1)(\gamma + 2)[p_0 \gamma - p_1 \alpha_1 \beta_1 x] \cdot \Phi_1(\alpha_\lambda + 1, \beta_\lambda + 1)$$
$$+ 1 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma + 2)[p_1(\alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) - (\alpha_2 + 1)(\beta_2 + 1)x] x \cdot \Phi_2(\alpha_\lambda + 2, \beta_\lambda + 2), +$$
$$+ 1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)(\alpha_2 + 2)(\beta_2 + 2) x^2 \Phi_3(\alpha_\lambda + 3, \beta_\lambda + 3).$$

3. Noch interessanter gestaltet sich die Verallgemeinerung der für die hypergeometrische Reihe geltenden Formel

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x).$$

Wir führen dazu noch eine zweite Art kontiguer Funktionen ein, die zum Unterschied von der ersten bezeichnet werden mag durch

$$\Phi'_r(\alpha_\lambda + r, \beta_\lambda + r)$$

und deren $(n+1)$ter Koeffizient definiert wird durch die Gleichung

$$18. \quad c_{n+1}^{(r)\prime} = \frac{(-1)^{n+1} D_{r,\, n+r}}{p_0^{n+1}(n+1)!\,(\gamma + r) \ldots (\gamma + r + n)}, \quad c_0^{(r)\prime} = 1.$$

Die Koeffizienten $c^{(r)\prime}$ unterscheiden sich also von den $c^{(r)}$ nur durch den Nenner, wo bei den $c^{(r)\prime}$ $(n+1)!$ steht wie in $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ selbst, während in den $c^{(r)}$ stand

$$(r + 1) \ldots (r + n + 1).$$

Entwickelt man in (18.) $D_{r,n+r}$ nach der letzten Horizontalreihe und berücksichtigt dabei wieder Formel (18.) für die nächstfolgenden kleineren Werte von n, so erhält man als Rekursionsformel der Reihe Φ_r':

$$\begin{aligned} 19. \quad & c_{n+1}^{(r)\prime} \cdot p_0 (n+1) n (n-1) \ldots (n - \varrho + 3)(n + r + \gamma) \\ & + c_n^{(r)\prime} \cdot p_1 n (n-1) \ldots (n - \varrho + 3)(n + r + \alpha_1)(n + r + \beta_1) \\ & + c_{n-1}^{(r)\prime} \cdot p_2 (n-1) \ldots (n - \varrho + 3) \cdot (n + r) \cdot (n + r + \alpha_2)(n + r + \beta_2) \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + c_{n-\varrho+2}^{(r)\prime} (n + r) \ldots (n + r - \varrho + 3)(n + r + \alpha_{\varrho-1})(n + r + \beta_{\varrho-1}) = 0. \end{aligned}$$

Für $r = 0$ geht (19.), wie es sein muss, in die Rekursionsformel (2.) von Φ über, da sich dann in jedem Glied $\varrho - 2$ Faktoren, die allen gemeinsam sind, streichen lassen.

Aus den beiden Formeln (14.) und (18.) ergiebt sich nun nach ganz

einfachen Umformungen folgende Relation zwischen ϱ kontiguen Funktionen der zweiten Art

$$20.\quad p_0 \frac{d^{\varrho-1}}{dx^{\varrho-1}} \Phi + \frac{p_1 \alpha_1 \beta_1}{\gamma} \frac{d^{\varrho-2}}{d x^{\varrho-2}} \Phi_1' + \frac{1!\, p_2 (\alpha_2+1)(\beta_2+1)}{\gamma+1} \cdot \frac{d^{\varrho-3}}{dx^{\varrho-3}} \Phi_2' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\varrho-2)!\,(\alpha_{\varrho-1}+\varrho-2)(\beta_{\varrho-1}+\varrho-2)}{\gamma+\varrho-2} \cdot \Phi'_{\varrho-1} = 0.$$

Dabei wurde die Determinante $D_{0,n}$ wie in (14.) zerlegt; eine allgemeinere Zerlegung derselben ist die folgende

$$21.\quad D_{0,\,n} = D_{0,\,k-\varrho+1} \cdot D_{k-\varrho+2,\,n} -$$

$$p_0(k-\varrho+2)(\gamma+k-\varrho+1) \cdot p_2(\alpha_2+k-\varrho+2)(\beta_2+k-\varrho+2) \cdot D_{0,k-\varrho} \cdot D_{k-\varrho+3,n} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\varrho-2} p_0^{\varrho-2} (k-\varrho+2) \ldots (k-1) \cdot (\gamma+k-\varrho+1) \ldots$$

$$\ldots (\gamma+k-2)(\alpha_{\varrho-1}+k-1)(\beta_{\varrho-1}+k-1) \cdot D_{0,\,k-\varrho} \cdot D_{k,\,n},$$

aus der unter Berücksichtigung von (18.) sich ergiebt für $k \geqq \varrho - 1$

$$22.\quad (-1)^{k-\varrho+2} \cdot p_0^{k-\varrho+2} \cdot \gamma \ldots (\gamma+k-\varrho) \frac{d^k \Phi}{dx^k} =$$

$$\frac{D_{0,\,k-\varrho+1}}{\gamma+k-\varrho+1} \cdot \frac{d^{\varrho-2}\Phi'_{k-\varrho+2}}{dx^{\varrho-2}} + D_{0,\,k-\varrho}\Big[\frac{k-\varrho+2}{\gamma+k-\varrho+2} p_2(\alpha_2+k-\varrho+2)(\beta_2+k-\varrho+2) \frac{d^{\varrho-3}\Phi'_{k-\varrho+3}}{dx^{\varrho-3}}$$

$$+ \frac{(k-\varrho+2)(k-\varrho+3)}{\gamma+k-\varrho+3} p_3(\alpha_3+k-\varrho+3)(\beta_3+k-\varrho+3) \frac{d^{\varrho-4}\Phi'_{k-\varrho+4}}{dx^{\varrho-4}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(k-\varrho+2)\ldots(k-1)}{\gamma+k+1} (\alpha_{\varrho-1}+k-1)(\beta_{\varrho-1}+k-1) \cdot \Phi'_k\Big]$$

d. h. eine beliebige Ableitung von Φ, deren Ordnung mindestens $= \varrho - 1$, ist durch die $\varrho - 2$ ersten Ableitungen von $\varrho - 1$ kontiguen Funktionen auszudrücken. — Für $k = \varrho - 1$ geht (22.) in (20.) über.

Zu einer weiteren Einsicht in die Formeln (20.) und (22.) und in die wahre Bedeutung der Funktionen $\Phi'_r(\alpha_\lambda + r)$ gelangt man jedoch vermittelst der Resultate, zu denen Herr *Schafheitlin* in seiner in der Einleitung zitierten Dissertation gelangt. Er betrachtet dort Differentialgleichungen ϱter Ordnung mit ϱ singulären Punkten, bei denen die Koeffizienten ganze Funktionen von z respektive vom Grad

$$\varrho,\ \varrho-1,\ \ldots,\ 1,\ 0$$

sind. Für diese wird eine „Normalform" aufgestellt, d. h. es werden $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Grössen eingeführt

$$a_{11}$$
$$a_{21}, a_{22}$$
$$a_{31}, a_{32}, a_{33}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, a_{\varrho 3}, \ldots a_{\varrho\varrho}$$

derart, dass die Grössen jeder Gruppe unter einander vertauschbar sind, und dass die Ableitung einer Funktion, die der Differentialgleichung genügt, dieselbe Differentialgleichung befriedigt, wenn darin jede der Grössen a um 1 vermehrt wird. Diese Grössen stammen wie in unserem Fall aus der Rekursionsformel der durch die Differentialgleichung definierten Reihe, welche — in die bisher gebrauchten Zeichen übersetzt — lautet:

$$23. \quad c_{k+1} \cdot p_0 \cdot (k+1)\, k \ldots (k-\varrho+3)(k+a_{11}-\varrho+2)$$
$$+ \; c_k \cdot p_1\, k\,(k-1) \ldots (k-\varrho+3)(k+a_{21}-\varrho+2)(k+a_{22}-\varrho+2)$$
$$+ \; c_{k-1} \cdot p_2 (k-1) \ldots (k-\varrho+3)(k+a_{31}-\varrho+2)(k+a_{32}-\varrho+2)(k+a_{33}-\varrho+2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ \; c_{k-\varrho+2} \cdot (k+a_{\varrho 1}-\varrho+2) \ldots \ldots (k+a_{\varrho\varrho}-\varrho+2) = 0.$$

Herr *Schafheitlin* zeigt nun, dass für spezielle Werte der a die Differentialgleichung ϱ ter Ordnung sich auf eine solche niedrigerer Ordnung reduzieren lässt, und zwar auf eine der zweiten Ordnung, wenn von den a jeder Gruppe immer nur zwei willkürlich bleiben, die übrigen aber in der λ ten Gruppe die Werte haben

$$24. \quad a_{\lambda 1} = \varrho - 2, \; a_{\lambda 2} = \varrho - 3, \; \ldots, \; a_{\lambda, \lambda-2} = \varrho - \lambda + 1$$
$$(\lambda = 3, 4, \ldots, \varrho)$$

Die Differentialgleichung ϱ ter Ordnung ist nämlich dann nur das Resultat einer $(\varrho - 2)$ fachen Differentiation einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, oder — was nach den dortigen Ergebnissen dasselbe besagt —: vermindert man jedes der a um $\varrho - 2$, so verschwinden in der Differentialgleichung die Koeffizienten von

$$y, \frac{dy}{dz}, \ldots, \frac{d^{\varrho-3} y}{dz^{\varrho-3}}$$

identisch.

Um jene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit der unsrigen zu identifizieren, brauchen wir nur noch zu setzen

$$25. \quad \begin{cases} a_{\lambda,\lambda-1} - \varrho + 2 = \alpha_{\lambda-1}, \; a_{\lambda,\lambda} - \varrho + 2 = \beta_{\lambda-1} \\ (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho,) \\ a_{11} - \varrho + 2 = \gamma \end{cases}$$

In der That werden diese Grössen durch dieselben Gleichungen definiert, wie es bei uns geschehen ist.

Versteht man nun unter den a von jetzt an immer die in (24.) und (25.) angegebenen Werte, so ist (23.) die Rekursionsformel von $\Phi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, und wenn jedes der $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ a um r vermehrt wird, die von $\Phi'_r(\alpha_\lambda + r, \beta_\lambda + r)$ [vergl. (19.)].

Um also die Differentialgleichung zu finden, der die Funktion Φ'_r genügt, hat man die vorgelegte Differentialgleichung $\varrho - 2$ mal zu differenzieren, in der resultierenden Differentialgleichung:

$$26. \quad \prod_{(i=1,2,\ldots,\varrho)} (z - a_i) \cdot y^{(\varrho)} + \sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} p_\lambda [\alpha_\lambda + \beta_\lambda + 2\lambda - 1 + (\varrho - 2)(\lambda + 1)] (z - a_i)^\lambda \cdot y^{(\varrho-1)}$$
$$+ \sum_{k=2}^{\varrho} y^{(\varrho-k)} \cdot \sum_{\lambda=k-1}^{\varrho-1} (\lambda - 1) \ldots (\lambda - k + 2) p_\lambda \left[\binom{\varrho-2}{k-2} (\alpha_\lambda + \lambda - 1)(\beta_\lambda + \lambda - 1) + \right.$$
$$\left. + \binom{\varrho-2}{k-1} \lambda (\alpha_\lambda + \beta_\lambda + 2\lambda - 1) + \lambda(\lambda+1) \binom{\varrho-2}{k} \right] (z - a_i)^{\lambda-k+1} = 0$$

die Bezeichnung des Herrn *Schafheitlin* durch die a einzuführen, jedes derselben um r zu vermehren und alsdann den a die Werte aus (24.) und (25.) beizulegen.

Man tritt also durch die Betrachtung dieser kontiguen Funktionen zweiter Art unmittelbar in die Klasse der Differentialgleichungen ϱter Ordnung mit ϱ singulären Punkten zurück, von der hiernach die vorgelegte nur ein spezieller Fall ist. Dies giebt gleichzeitig einen Aufschluss darüber, dass in (22.) die rechte Seite erst mit der $(\varrho - 2)$ten Ableitung beginnt, wie gross auch k sei.

Zur Veranschaulichung dieser Erörterung möge die Differentialgleichung 4ter Ordnung mit 4 singulären Punkten dienen; dieselbe lautet nach Einführung der a (vergl. *Schafheitlin*, pag. 11), wenn

$$A_{n,r}$$

die elementare symmetrische Funktion $r$ter Ordnung von $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ bedeutet:

$$27. \quad \prod_{i=1,2,3,4} (z - a_i) \frac{d^4y}{dz^4}$$

$$+ [p_0 \cdot A_{11} + p_1 (A_{21} + 1)(z - a) + p_2 (A_{31} + 3)(z - a)^2 + (A_{41} + 6)(z - a)^3] \frac{d^3y}{dz^3}$$

$$+ [p_1 A_{22} + p_2 (A_{32} + A_{31} + 1)(z - a) + (A_{42} + 3 A_{41} + 7)(z - a)^2] \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$+ [p_2 A_{33} + (A_{43} + A_{42} + A_{41} + 1)(z - a)] \cdot \frac{dy}{dz} + A_{44} \cdot y = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese für die Werte (24.), (25.) in die Differentialgleichung (26.) (wenn dort $\varrho = 4$) oder, wenn man erst jedes a um 2 vermindert und dann die Werte (24.), (25.) einsetzt, direkt in die vorgelegte Differentialgleichung übergeht, in der nur $\frac{d^2y}{dz^2}$ an Stelle von y steht.

4. Es sei gestattet, zum Beschluss dieses Kapitels, in dem von den Eigenschaften der Reihe

$$\Phi (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$$

gehandelt wurde, noch eine kurze Bemerkung über die in den Koeffizienten auftretenden Determinanten $D_{0,n}$ zu machen. Für $\varrho = 3$, d. h. in dem von Herrn *Seifert* untersuchten Fall, ist dies die gewöhnliche „Kettenbruchdeterminante“. (Vergl. die Abhandlungen des Herrn *Kronecker* in den Monatsberichten der Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 14. Februar 1878 p. 104 und 16. Juni 1881, I., — ferner: *Günther*, „Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form“, Erlangen, 1873, p. 32 ff., woselbst sich noch zahlreiche Litteraturangaben über solche Determinanten finden.) — Der Zähler des Koeffizienten c_n der Reihe

$$\Phi (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma)$$

ist also der Nenner des $n$ten Näherungsbruches des Kettenbruches

$$28. \quad \cfrac{1}{p_1 \alpha_1 \beta_1 - \cfrac{p_0 \alpha_0 \beta_0 (\alpha_2 + 1)(\beta_2 + 1)}{p_1 (\alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) - \cfrac{p_0 (\alpha_0 + 1)(\beta_0 + 1)(\alpha_2 + 2)(\beta_2 + 2)}{p_1 (\alpha_1 + 2)(\beta_1 + 2) - \ldots}}}$$

Da ferner der Quotient zweier auf einander folgenden Koeffizienten von $\Phi (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma)$ als Kettenbruch geschrieben werden kann:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{K_n}{p_0 (n + 1)(\gamma + n)},$$

wo $$K_n = -p_1(\alpha_1+n)(\beta_1+n) - \cfrac{p_0(\alpha_2+n)(\beta_2+n)\,n\,(\gamma+n-1)}{-p_1(\alpha_1+n-1)(\beta_1+n-1) - \cfrac{p_0(\alpha_2+n-1)(\beta_2+n-1)(n-1)(\gamma+n-2)}{\cdots \, \cfrac{\cdots}{-p_1(\alpha_1+1)(\beta_1+1) - \cfrac{p_0(\alpha_2+1)(\beta_2+1)}{p_1\,\alpha_1\,\beta_1}}}}$$

so kann man die Reihe Φ auch in der folgenden Form schreiben:

$$29. \quad \Phi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_0 \cdot K_1 \dots K_{n-1}}{p_0^n \cdot n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \cdot x^n.$$

Für $\varrho = 2$ reduziert sich der Kettenbruch K_n auf das Anfangsglied $-p_1(\alpha_1+n)(\beta_1+n)$, und man sieht an dieser Form am besten, wie die Reihe für $\varrho = 3$ aus der hypergeometrischen entsteht.

Die Determinanten $D_{o,n}$ für $\varrho > 3$ sind diejenigen, die Herrn *Fürstenau* zu einer Verallgemeinerung der Kettenbrüche geführt haben. (Jahresbericht über das Kgl. Realgymnasium zu Wiesbaden, 1874.)

Beim Abschluss dieser Untersuchungen möge endlich noch bemerkt werden, dass ein wichtiges Beispiel der hier behandelten Differentialgleichungen diejenigen sind, welchen die *Lamé*schen Funktionen $(\varrho - 1)$ter Ordnung genügen. Diese sind nämlich (siehe *Heine*, Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I, p. 445 ff. und speziell p. 359):

$$\psi(z)\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}\psi'(z)\frac{dy}{dz} + \vartheta(z) \cdot y = 0,$$

wo $\vartheta(z)$ eine ganze Funktion $(\varrho - 2)$ten Grades ist, $\psi(z)$ die frühere Bedeutung hat. Diese Differentialgleichungen haben also von vornherein die im vorhergehenden zu Grunde gelegte Form, und man kann auf sie unmittelbar die erörterte Methode anwenden.

Thesen.

I.

Bei der wissenschaftlichen Arbeit ist die Beschränkung auf ein nicht allzuweit ausgedehntes Gebiet heilsam und wünschenswert.

II.

Durch einen Beweis, der sich anderer Mittel bedient als solcher, die in dem Tenor des zu beweisenden Satzes unmittelbar gegeben sind, ist in der Mathematik ein Problem noch keineswegs als gelöst zu betrachten.

III.

So wünschenswert es wäre, so grosser Anstrengungen wird es bei dem gegenwärtigen Stande der Analysis noch bedürfen, die Fundamentalsubstitutionen einer beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung in einer für die praktische Berechnung ebenso geeigneten Form auszudrücken, wie es bei der Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe durch die Π-Funktion geschieht.

Vita.

Natus sum Lotharius Guilelmus Julius *Heffter* Coeslinensis a. d. III. Id. Jun. anno h. s. LXII patre *Werner*, qui iudicis munere tum fungebatur, matre *Julia* e gente *Bredt*, quam praematura morte abreptam lugeo. Postea autem pater uxore denuo in matrimonium ducta matrem mihi redonavit.

Fidei addictus sum evangelicae. Puerilem aetatem compluribus in urbibus egi. Quam ob rem diversis in scholis primis litterarum elementis imbutus decimo aetatis anno Heidelbergensis inter discipulos gymnasii receptus sum ibique ad tertiam classem ascendi. Deinde gymnasium Gorlicense Augustum, quod *G. Kruegero* rectore tum florebat, adii praeceptisque viri carissimi doctoris *Putzler* mathematicarum rerum amore affectus sum. Maturitatis testimonium vere anni h. s. LXXXI adeptus autumno eiusdem anni Ruperto-Carolam petii universitatem virosque audivi clarissimos: *de Bunsen*, *M. Cantor*, *Fischer*, *Fuchs*, *Koehler*, *Quincke*, *Rosenbusch*, *Rummer*, *Schapira*. — Duobus annis ibi peractis Berolini Fridericae Guilelmae civis academicus inscriptus per quinque semestria scholis interfui virorum doctissimorum: *Fuchs*, *Hettner*, *Kayser*, *Kirchhoff*, *Knoblauch*, *Kronecker*, *Kummer*, *Netto*, *Runge*, *Weierstrass*, *Zeller*. Seminarii mathematici per tria semestria fui sodalis.

Cum omnibus, quos supra enumeravi, viris illustrissimis optime de me meritis, tum maxime professoribus ill. ill. *Fuchs*, *Kronecker*, *Weierstrass* amplissimas ago gratias nec unquam eorum benevolentiae obliviscar.

Druck von Gebr. Unger in Berlin, Schönebergerstr. 17a.